PRINCIPIA

Princípios Matemáticos de Filosofia Natural

LIVRO I

Isaac Newton

edusp

Isaac Newton

» PRINCIPIA

Princípios Matemáticos de Filosofia Natural

Livro I

Tradução

Trieste Ricci
Leonardo Gregory Brunet
Sônia Terezinha Gehring
Maria Helena Curcio Célia

edusp

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Mathefeos Profeffore *Lucafiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juffu *Societatis Regiæ* ac Typis *Jofephi Streater*. Proftat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

[Ver nota 1 do Apêndice].

[Sir Isaac Newton. Ver nota 2 do Apêndice].

» SUMÁRIO

PRINCIPIA

» NOTA DOS TRADUTORES

A presente tradução foi feita com base na versão para o inglês dos *Principia*, realizada por Andrew Motte em 1729; o texto utilizado foi revisado e editado por R.T. Crawford, em 1934, acrescido de um Apêndice com notas escritas por Florian Cajori. Em consultas eventuais, utilizamos também uma impressão desta mesma edição da *Encyclopaedia Britannica*, volume 34 da coleção *Great Books of the Western World*.

Evitamos sempre que possível qualquer adaptação do texto à linguagem corrente da Física. Nas situações em que a compreensão ficasse comprometida, optamos por notas de tradução (N.T.). Tais notas foram também utilizadas para mencionar palavras inglesas originais sem equivalências exatas em português (*bulk*, por exemplo).

Entre as obras consultadas, salientamos *The Compact Edition of the Oxford English Dictionary, Oxford University Press,* 1971, de muita utilidade na tradução de termos ingleses arcaicos.

Alertamos o leitor para o fato de que esta edição traz apenas o Livro I dos *Principia*, restando ainda os Livros II e III.

Agradecemos a José Antônio Trindade Borges da Costa e Maria Helena Gravina pela valiosa colaboração na fase final de revisão da tradução e pelas sugestões.

Dedicamos este esforço à memória de Maria Helena Curcio Célia.

OS TRADUTORES

» PREFÁCIO DE NEWTON À PRIMEIRA EDIÇÃO

Já que os antigos (como nos diz *Pappus*) consideravam a ciência da mecânica da maior importância na investigação das coisas naturais, e os modernos, rejeitando formas substanciais e qualidades ocultas, têm se esforçado para sujeitar os fenômenos da natureza às leis da matemática, cultivei a matemática, neste tratado, no que ela se relaciona à filosofia. Os antigos consideravam a mecânica sob dois aspectos: como racional – a qual procede rigorosamente por demonstrações – e prática. À mecânica prática pertencem todas as artes manuais, das quais a mecânica tomou seu nome. Mas como os artesãos não trabalham com rigor perfeito, diferenciam a mecânica da geometria, o que é perfeitamente preciso é chamado geométrico, o que é menos rigoroso é chamado mecânico. No entanto, os erros não estão na arte, mas nos artesãos. Aquele que trabalha com menor rigor é um mecânico imperfeito; e se alguém pudesse trabalhar com rigor perfeito, seria o mais perfeito dos mecânicos, pois os desenhos de linhas retas e círculos, sobre as quais a geometria está fundada, pertence à mecânica. A geometria não nos ensina a traçar essas linhas, mas exige que sejam traçadas, pois deve o aprendiz primeiro ser ensinado a traçá-las rigorosamente antes de ser iniciado na geometria, a qual, então, mostra como os problemas podem ser resolvidos através dessas operações. Desenhar linhas retas e círculos é um problema, mas não

um problema geométrico. A solução deste problema é exigida da mecânica, e seu uso é mostrado pela geometria; e é a glória da geometria que, a partir desses poucos princípios, trazidos do nada, seja capaz de exibir tantos resultados. Portanto, a geometria está fundamentada na prática mecânica e não é nada mais do que aquela parte da mecânica universal que rigorosamente propõe e demonstra a arte de medir. Mas uma vez que as artes manuais são principalmente empregadas no movimento dos corpos, ocorre que a geometria refere-se usualmente às suas dimensões, e a mecânica a seus movimentos. Nesse sentido, a mecânica racional será a ciência dos movimentos que resultam de quaisquer forças, e das forças exigidas para produzir quaisquer movimentos, rigorosamente propostas e demonstradas. Essa parte da mecânica, na medida em que se estende às cinco potências que se referem às artes manuais, foi cultivada pelos antigos, que consideraram a gravidade (não sendo ela uma potência manual) apenas para mover pesos por aquelas potências. Mas examinando a filosofia e não as artes, e escrevendo não sobre as potências manuais, mas naturais, considero principalmente aquelas coisas que se referem à gravidade, levidade, força elástica, resistência dos fluidos e forças desse tipo, sejam atrativas ou repulsivas; e, portanto, ofereço este trabalho como os princípios matemáticos da filosofia, pois toda a essência da filosofia parece constituir nisso – a partir dos fenômenos de movimento, investigar as forças da natureza e, então, dessas forças demonstrar os outros fenômenos; e para esse fim dirigem-se as proposições gerais no primeiro e no segundo Livros. No terceiro Livro, dou um exemplo disso na explicação do Sistema do Mundo; pois, pelas proposições matematicamente demonstradas nos Livros anteriores, no terceiro derivo dos fenômenos celestes as forças de gravidade com as quais corpos tendem para o Sol e para os vários planetas. Então, dessas forças, por outras proposições que também são matemáticas, deduzo os movimentos dos planetas, dos cometas, da Lua e do mar. Gostaria que pudéssemos derivar o resto dos fenômenos da Natureza dos princípios mecânicos pelo mesmo tipo de raciocínio, pois, por muitas razões, sou induzido a suspeitar de que todos eles possam depender de certas forças pelas quais as partículas dos corpos, por algumas causas até aqui desconhecidas, ou são mutuamente impelidas umas em direção às outras e se ligam em formas regulares, ou são repelidas e se afastam umas das outras. Sendo desconhecidas essas forças, os filósofos até agora têm tentado em vão a investigação da Natureza; mas espero que os princípios aqui expostos tragam alguma luz, seja a esse ou a algum outro método mais verdadeiro de filosofar.

Na publicação deste trabalho, o extremamente perspicaz e universalmente douto Sr. *Edmund Halley* não apenas me auxiliou na correção de er-

ros de impressão e na preparação das figuras geométricas, mas foi por suas solicitações que veio a ser publicado; pois quando de mim obteve as demonstrações da forma das órbitas celestes, pressionou-me continuamente a comunicá-las à *Royal Society*, a qual, posteriormente, por seu gentil encorajamento e pedido, fez-me pensar em publicá-las. Mas após eu ter começado a considerar as irregularidades dos movimentos lunares e ter me iniciado em algumas outras coisas relacionadas às leis e medidas da gravidade e outras forças; nas figuras que seriam descritas pelos corpos atraídos de acordo com leis dadas; no movimento de vários corpos que se movem entre si; no movimento de corpos em meios resistentes; nas forças, densidades, e no movimento de meios; nas órbitas dos cometas e coisas desse tipo, declinei daquela publicação, até que tivesse feito uma investigação daqueles problemas e pudesse apresentá-los como um todo. O que se relaciona aos movimentos lunares (sendo imperfeito) reuni nos Corolários da Proposição LXVI, para evitar ser obrigado a propor e distintamente demonstrar as várias coisas ali contidas por um método mais prolixo do que o assunto merecia e interromper a série de outras proposições. Algumas coisas, descobertas depois de outras, decidi inserir em lugares menos adequados, em vez de trocar o número das proposições e das citações. Peço enfaticamente que o que aqui realizei seja lido com indulgência e que meus trabalhos em um assunto tão difícil sejam examinados não tanto com espírito de censura, mas com o de reparar seus defeitos.

IS. NEWTON
Cambridge, Trinity College
8 de maio de 1686[1]

1. Ver nota 3 do Apêndice.

» PREFÁCIO DE NEWTON À SEGUNDA EDIÇÃO

Nesta segunda edição dos *Principia* há muitas correções e alguns acréscimos[1]. Na segunda seção do primeiro Livro, a determinação de forças, pelas quais se pode fazer os corpos girar em órbitas dadas, é ilustrada e ampliada. Na sétima seção do segundo Livro, a teoria da resistência de fluidos foi investigada mais rigorosamente e confirmada por novos experimentos. No terceiro Livro, a teoria lunar e a precessão dos equinócios foram deduzidas de maneira mais completa a partir de seus princípios; e a teoria dos cometas foi confirmada por mais exemplos do cálculo de suas órbitas, feitos também com maior rigor.

IS. NEWTON

Londres, 28 de março de 1713

1. Ver nota 4 do Apêndice.

» PREFÁCIO DE COTES À SEGUNDA EDIÇÃO[1]

Aqui apresentamos ao leitor paciente a muito esperada nova edição da Filosofia de *Newton*, agora grandemente corrigida e ampliada. Os principais conteúdos deste trabalho tão aclamado são reunidos no índice. O que foi acrescentado ou modificado está indicado no Prefácio do autor. Restou-nos acrescentar algo relacionado ao método desta filosofia.

Aqueles que trataram da filosofia natural podem ser agrupados em três classes. Desses, alguns atribuíram qualidades específicas e ocultas a várias espécies de coisas, de acordo com as quais se supõe que os fenômenos de corpos particulares aconteçam de uma forma desconhecida. O conjunto da doutrina das escolas derivadas de *Aristóteles* e dos peripatéticos fundamenta-se neste princípio. Eles afirmam que os vários efeitos dos corpos surgem das naturezas particulares daqueles corpos. Mas de onde os corpos derivam aquelas naturezas, eles não dizem; e, portanto, não nos dizem nada. E, totalmente ocupados em dar nomes às coisas e não em investigá-las, inventaram, podemos dizer, uma maneira filosófica de falar, mas não nos deram a conhecer a verdadeira filosofia.

1. Ver nota 5 do Apêndice.

Outros concentram seus esforços para maiores progressos rejeitando aquela miscelânea de palavras inúteis. Eles supõem que toda matéria é homogênea e que a variedade de formas que é vista nos corpos provém de algumas relações bem simples e claras das partículas componentes. E partindo de coisas simples para as mais complexas, eles certamente procedem corretamente, se atribuírem àquelas relações primárias nenhuma outra relação que não aquelas que a Natureza estabeleceu. Mas quando tomam a liberdade de imaginar à vontade formas e grandezas desconhecidas, situações e movimentos incertos das partes e, além disso, imaginam fluidos ocultos, penetrando livremente os poros dos corpos, imbuídos de uma sutileza capaz de tudo desempenhar e agitados com movimentos ocultos, incorrem em sonhos e quimeras e descuidam da verdadeira constituição das coisas, que certamente não deverá ser derivada de conjecturas falaciosas, quando mal a alcançamos pelas mais seguras observações. Aqueles que tomam as hipóteses como princípios primeiros de suas especulações, embora mais tarde procedam com a maior precisão a partir destes princípios, podem realmente construir um engenhoso romance, mas que ainda assim será somente um romance.

Resta, então, a terceira classe, que adota a filosofia experimental. Estes, na verdade, derivam as causas de todas as coisas a partir dos princípios mais simples possíveis; mas, então, não aceitam nada como princípio, a não ser que tenha sido provado por fenômenos. Não constroem nenhuma hipótese, nem as admitem como filosofia, a não ser como questões cuja verdade pode ser discutida. Procedem, portanto, em um método duplo: sintético e analítico.

A partir de alguns fenômenos selecionados, deduzem, por análise, as forças da Natureza e as mais simples leis de forças, e daí, por síntese, mostram a constituição do resto. Esta é a melhor forma de filosofar, que nosso renomado autor coerentemente preferiu abraçar em detrimento do resto, e imaginou merecer ser cultivada e adornada pelos seus excelentes esforços. Desta, ele nos deu um exemplo ilustre com a explicação do Sistema do Mundo, deduzido da Teoria da Gravidade. Que o atributo da gravidade fosse encontrado em todos os corpos[2], outros suspeitaram antes dele, ou imaginaram, mas ele foi o único e primeiro filósofo que pode demonstrá-lo a partir das aparências e torná-lo uma base sólida para as especulações mais nobres.

Sei que algumas pessoas de grande renome, demasiado imbuídas de certos preconceitos, estão resistindo em aceitar este novo princípio e estão

2. Ver nota 6 do Apêndice.

dispostas a preferir noções incertas às certas. Não é minha intenção depreciar a reputação destes homens eminentes; devo apenas apresentar ao leitor tais considerações, que o capacitarão a formar um julgamento justo nesta disputa.

Portanto, uma vez que devemos começar nosso raciocínio a partir do que é mais simples e próximo de nós, consideremos um pouco qual é a natureza da gravidade em corpos terrestres, para que possamos proceder com mais segurança quando formos observá-la nos corpos celestes, que estão a distâncias remotas de nós. Todos os filósofos agora concordam que todos os corpos circunterrestres gravitam em direção à Terra; que não existe nenhum corpo sem peso, também já foi confirmado por inúmeras experiências; que o que é levidade relativa não é, de fato, levidade, mas apenas parece ser e origina-se da gravidade preponderante dos corpos contíguos.

Além disso, como todos os corpos gravitam em direção à Terra, da mesma forma a Terra gravita em direção a todos os corpos. Que a ação da gravidade é mútua e igual em ambos os lados está, então, provada. Divida-se a massa da Terra em quaisquer duas partes, iguais ou desiguais; agora, se os pesos das partes uma em direção à outra não fossem mutuamente iguais, o menor peso cederia ao maior e as duas partes mover-se-iam juntas indefinidamente em uma linha reta, em direção àquele ponto para o qual tende o maior peso, o que contraria totalmente a experiência. Portanto, devemos dizer que os pesos com os quais as partes tendem uma para a outra são iguais; isto é, que a ação da gravidade é mútua e igual em direções contrárias.

Os pesos dos corpos a distâncias iguais do centro da Terra são como as quantidades de matéria nos corpos. Isto é inferido da aceleração igual de todos os corpos que caem a partir de um estado de repouso, devido a seus pesos; pois as forças pelas quais os corpos desiguais são igualmente acelerados devem ser proporcionais às quantidades da matéria a serem movidas. Agora, que todos os corpos em queda são igualmente acelerados conclui-se a partir de experiências onde a resistência do ar é eliminada, como no recipiente evacuado do Sr. *Boyle,* em que descrevem espaços iguais em tempos iguais; isto é, porém, ainda mais precisamente demonstrado pelas experiências com pêndulos.

As forças atrativas de corpos a distâncias iguais são como as quantidades de matéria nos corpos. Pois uma vez que os corpos gravitam em direção à Terra, e a Terra novamente em direção aos corpos, com momentos iguais, o peso da Terra em direção a cada corpo, ou a força com a qual o corpo atrai a Terra, será igual ao peso do mesmo corpo em direção à Terra. Mas provou-se ser este peso igual à quantidade de matéria no corpo; e, por-

tanto, a força com a qual cada corpo atrai a Terra, ou a força absoluta do corpo, será igual à própria quantidade de matéria.

Portanto, a força atrativa dos corpos inteiros surge, e é composta, das forças atrativas das partes, porque, como acabamos de mostrar, se o volume da matéria for aumentado ou diminuído, sua potência será proporcionalmente aumentada ou diminuída. Devemos, assim, concluir que a ação da Terra é composta da união das ações de suas partes e, portanto, que todos os corpos terrestres devem se atrair mutuamente, com forças absolutas que são como a matéria atrativa. Esta é a natureza da gravidade sobre a Terra; vejamos agora como ela é nos céus.

Que todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, pelo menos até que seja forçado a mudar esse estado por uma força externa, é uma lei da Natureza universalmente aceita por todos os filósofos. Mas daí segue que os corpos que se movem em linha curvas e são, portanto, continuamente desviados de linhas retas que são tangentes às suas órbitas, são retidos em suas trajetórias curvilíneas por alguma força que atua continuamente. Então, uma vez que os planetas se movem em órbitas curvilíneas, deve haver alguma força operando, pela ação incessante da qual eles são continuamente levados a se desviarem das tangentes.

Agora, é evidente a partir de um raciocínio matemático e rigorosamente demonstrado, que todos os corpos que se movem em qualquer linha curva descrita em um plano e que, por um raio traçado até um ponto qualquer, quer em repouso ou movendo-se de qualquer maneira, descrevem áreas em torno desse ponto que são proporcionais aos tempos, são impelidos por forças dirigidas para aquele ponto. Isto deve, portanto, ser aceito. Então, uma vez que todos os astrônomos concordam que os planetas primários descrevem em torno do sol – e os secundários em torno dos primários – áreas proporcionais aos tempos, segue que as forças pelas quais eles são continuamente desviados de suas tangentes e levados a girar em órbitas curvilíneas, são dirigidas em direção aos corpos que estão colocados nos centros das órbitas. Esta força pode, portanto, ser chamada, não impropriamente, de centrípeta no que se refere ao corpo girante, e de atrativa no que se refere ao corpo central, seja qual for a causa imaginada para a sua origem.

Além disso, deve ser aceito, como matematicamente demonstrado, que se vários corpos giram com um movimento igual em círculos concêntricos e os quadrados dos tempos periódicos são iguais aos cubos das distâncias a partir do centro comum, as forças centrípetas serão inversamente iguais aos quadrados das distâncias. Ou, se os corpos girarem em órbitas que são quase

circulares e as apsides das órbitas estiverem em repouso, as forças centrípetas dos corpos girantes serão inversamente iguais aos quadrados das distâncias. Todos os astrônomos concordam que estes dois fatos se aplicam a todos os planetas. Portanto, as forças centrípetas de todos os planetas são inversamente como os quadrados das distâncias a partir dos centros de suas órbitas. Se alguém objetasse que as apsides dos planetas, e especialmente as da Lua, não estão perfeitamente em repouso, mas são levadas progressivamente com um tipo de movimento lento, poder-se-ia responder que, embora devamos aceitar que este movimento muito lento origina-se de um leve desvio da força centrípeta da lei do quadrado da distância, ainda assim somos capazes de calcular matematicamente a quantidade desse erro e descobrir que ela é perfeitamente desprezível. Pois mesmo a razão da própria força lunar centrípeta, que é a mais irregular de todas elas, variará inversamente como uma potência um pouco maior que a do quadrado da distância, mas será sessenta vezes mais próxima do quadrado do que do cubo da distância. Mas podemos dar uma resposta mais verdadeira, dizendo que esta progressão das apsides não deriva de um desvio da lei do inverso dos quadrados da distância, mas de uma causa bem diferente, como é admiravelmente mostrado neste trabalho. É certo, então, que as forças centrípetas com as quais os planetas tendem para o Sol, e os planetas secundários para os primários, são rigorosamente iguais ao inverso dos quadrados das distâncias.

Do que foi dito até aqui, fica claro que os planetas são mantidos em suas órbitas por alguma força que atua continuamente sobre eles; fica claro que esta força é sempre dirigida para o centro de suas órbitas; que sua intensidade é aumentada na sua aproximação e é diminuída no seu afastamento a partir do centro, e que é aumentada na mesma razão na qual o quadrado da distância é diminuído, e diminuída na mesma razão na qual o quadrado da distância é aumentado. Vejamos agora se, comparando as forças centrípetas dos planetas com a força da gravidade, podemos, não por acaso, deduzir que são do mesmo tipo. Elas serão do mesmo tipo se encontrarmos em ambos os lados as mesmas leis e os mesmos atributos. Vamos considerar primeiramente a força centrípeta da Lua, que está mais próxima de nós.

Os espaços retilíneos que os corpos que caem a partir do repouso descrevem em um dado tempo, exatamente no início do movimento, quando os corpos são impelidos por quaisquer que sejam as forças, são proporcionais às forças. Isto é deduzido a partir de raciocínio matemático. Portanto, a força centrípeta da Lua, girando em sua órbita, está para a força da gravidade na superfície da Terra como o espaço que a Lua descreveria – em um intervalo muito pequeno de tempo, destituída de toda a sua força circular e

descendo por sua força centrípeta em direção à Terra – está para o espaço que um corpo pesado descreveria ao cair pela força da sua gravidade próximo à Terra, no mesmo pequeno intervalo de tempo. O primeiro desses espaços é igual ao seno verso* do arco descrito pela Lua no mesmo tempo, pois aquele seno verso mede a translação da lua a partir da tangente, devido à força centrípeta e, portanto, pode ser calculado se o tempo periódico da Lua e sua distância do centro da Terra forem dados. O último espaço é encontrado por meio de experimentos com pêndulos, como o Sr. *Huygens* mostrou. Portanto, por meio de cálculo devemos encontrar que o primeiro espaço está para o último, ou a força centrípeta da Lua girando em sua órbita estará para a força da gravidade na superfície da Terra, assim como o quadrado do semidiâmetro da Terra está para o quadrado do semidiâmetro da órbita. Mas pelo que foi mostrado anteriormente, exatamente a mesma razão prevalece entre a força centrípeta da Lua girando em sua órbita e a força centrípeta da Lua próxima à superfície da Terra. Portanto, essas não são duas forças diferentes, mas uma e a mesma; pois se fossem diferentes, essas forças unidas fariam os corpos descerem para a Terra com duas vezes a velocidade com a qual eles cairiam se houvesse apenas a força da gravidade. Portanto, fica claro que a força centrípeta pela qual a Lua é continuamente tanto repelida para fora da tangente como atraída para ela e retida em sua órbita, é a mesma força da gravidade terrestre que alcança a Lua. E é razoável supor que esta força deve se estender a imensas distâncias, uma vez que mesmo nos topos das montanhas mais altas não percebemos nenhuma diminuição sensível dela. Portanto, a Lua gravita em direção à Terra; mas, por outro lado, a Terra, por uma ação mútua, igualmente gravita em direção à Lua, o que é também absolutamente confirmado nesta filosofia, em que as marés no mar e a precessão dos equinócios são tratados como devidos tanto à ação da Lua quanto à do Sol, sobre a Terra. Assim, descobrimos finalmente por qual lei a força da gravidade diminui as grandes distâncias da Terra. Pois uma vez que a gravidade não é, de forma alguma, diferente da força centrípeta da Lua, e esta é inversamente proporcional ao quadrado da distância, segue que é exatamente nesta mesma razão que a força da gravidade diminui.

Tratemos agora dos outros planetas. Porque as revoluções dos planetas primários em torno do Sol e dos secundários em torno de Júpiter e Saturno são o mesmo fenômeno que a revolução da Lua em torno da Terra, e como já foi demonstrado que as forças centrípetas dos planetas primários são dirigidas para o centro do Sol e aquelas dos planetas secundários para o

* A diferença entre a unidade e função co-seno (N. T.).

centro de Júpiter e Saturno, da mesma forma que a força centrípeta da Lua é dirigida para o centro da Terra, e, além disso, uma vez que todas estas forças são inversamente como os quadrados das distâncias a partir dos centros, da mesma forma como a força centrípeta da Lua é como o quadrado da distância a partir da Terra, devemos, é lógico, concluir que a natureza de todas é a mesma. Portanto, como a Lua gravita em direção à Terra e a Terra, por sua vez, em direção à Lua, assim também todos os planetas secundários gravitarão em direção aos seus primários e assim todos os primários em direção ao Sol, e o Sol também em direção aos primários.

Assim, o Sol gravita em direção a todos os planetas e todos os planetas em direção ao Sol. Pois os planetas secundários, enquanto acompanham os primários, giram neste meio tempo com os primários em torno do Sol. Portanto, pelo mesmo argumento, os planetas de ambos os tipos gravitam em direção ao Sol e o Sol em direção a eles. Que os planetas secundários gravitam em direção ao Sol é bastante evidente a partir das irregularidades da Lua, sobre as quais uma teoria mais precisa é sagazmente introduzida no terceiro Livro deste trabalho.

Que a força atrativa do Sol é propagada para todos os lados a distâncias prodigiosas e é difundida para toda parte do vasto espaço que o circunda, fica mais evidentemente mostrado pelo movimento dos cometas, que vindos de lugares imensamente distantes do Sol, aproximam-se bastante dele, às vezes tanto que seus periélios quase tocam seu corpo. A teoria destes corpos era completamente desconhecida para os astrônomos, até que, em nossa época, nosso admirável autor, com sucesso, descobriu-a e demonstrou sua verdade pelas observações mais seguras, de forma que fica agora evidente que os cometas se movem em seções cônicas, tendo seus focos no centro do Sol, e por raios traçados até ele descrevem áreas proporcionais aos tempos. Mas a partir destes fenômenos, fica claro e é demonstrado matematicamente que aquelas forças pelas quais os cometas são retidos em suas órbitas estão dirigidas para o Sol e são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias a partir do seu centro. Portanto, os cometas gravitam em direção ao Sol e, assim, a força atrativa do Sol não apenas age sobre os corpos dos planetas, colocados a distâncias dadas e muito aproximadamente no mesmo plano, mas também alcança os cometas nos mais diferentes pontos dos céus e nas distâncias mais diferentes. É da natureza dos corpos gravitantes, portanto, exercer sua força a todas as distâncias sobre todos os outros corpos gravitantes. Mas disso segue que todos os planetas e cometas atraem-se e gravitam uns em direção aos outros, o que também é confirmado pelas perturbações de Júpiter e Saturno observadas pelos astrônomos, e que se

originam da ação mútua destes dois planetas, como também daquele movimento muito lento das apsides, mencionado acima, que surge a partir de uma causa semelhante.

Chegamos a um ponto tal onde é necessário admitir que o Sol e a Terra, e todos os corpos celestes que acompanham o Sol, atraem-se mutuamente. Portanto , todas as menores partículas de matéria em cada um deles devem ter suas várias forças atrativas proporcionais às suas quantidades de matéria, como foi mostrado acima para os corpos terrestres. A distâncias diferentes, estas forças também serão inversamente iguais aos quadrados de suas distâncias; pois está matematicamente demonstrado que os globos que atraem, conforme esta lei, são compostos de partículas que se atraem de acordo com a mesma lei.

As conclusões anteriores baseiam-se neste axioma, que é aceito por todos os filósofos, isto é, que os efeitos do mesmo tipo, cujas propriedades conhecidas são as mesmas, têm sua origem nas mesmas coisas e também têm as mesmas propriedades desconhecidas. Pois se a gravidade for a causa da queda de uma pedra na *Europa*, quem duvida que esta também seja a causa da mesma queda na *América?* Se há uma gravitação mútua entre uma pedra e a Terra na *Europa*, quem duvidará que a mesma será mútua na *América?* Se na *Europa* a força atrativa de uma pedra e da Terra é composta das forças atrativas das partes, quem negará a mesma composição na *América?* Se na *Europa* a atração da Terra for propagada para todos os tipos de corpos e a todas as distâncias, por que não podemos dizer que se propaga da mesma forma na *América?* Toda filosofia fundamenta-se nesta regra; pois se esta for retirada, não poderemos afirmar nada como verdade geral. A constituição de coisas particulares é conhecida por meio de observações e experimentos; e quando isto é feito, não é possível se chegar a nenhuma conclusão geral sobre a natureza das coisas, exceto por esta regra.

Uma vez, então, que todos os corpos, quer na Terra ou nos céus, são pesados, até o ponto em que podemos realizar quaisquer experimentos ou observações com eles, devemos certamente admitir que a gravidade é encontrada em todos os corpos, universalmente. E da mesma forma como supomos os corpos como extensos, móveis ou impenetráveis, podemos igualmente concebê-los como pesados. A extensão, mobilidade e impenetrabilidade dos corpos tornam-se conhecidas para nós tão-somente por meio de experimentos; e exatamente da mesma forma determinamos suas gravidades. Todos os corpos sobre os quais podemos fazer quaisquer observações são extensos, móveis e impenetráveis; e daí concluímos que todos os corpos, mesmo aqueles sobre os quais não temos nenhuma observação, são

extensos, móveis e impenetráveis. Assim, todos os corpos sobre os quais podemos fazer observações são pesados; e daí concluímos que todos os corpos, mesmo aqueles sobre os quais não temos observações, também são pesados. Se alguém afirmar que os corpos das estrelas fixas não são pesados porque suas gravidades ainda não foram observadas, pode, pela mesma razão, afirmar que não são nem extensos, nem móveis ou impenetráveis, porque estas propriedades das estrelas fixas ainda não foram observadas. Em resumo, ou a gravidade deve ter um lugar entre as qualidades primárias de todos os corpos, ou extensão, mobilidade e impenetrabilidade não devem ter este lugar. E se a natureza das coisas não é corretamente explicada pela gravidade dos corpos, não será corretamente explicada pela sua extensão, mobilidade e impenetrabilidade dos corpos.

Sei de alguns que desaprovam esta conclusão e resmungam algo sobre qualidades ocultas. Estão continuamente contestando-nos capciosamente que a gravidade é uma propriedade oculta, e que causas ocultas devem ser banidas da Filosofia. Mas para isso a resposta é fácil: que estas são, de fato, causas ocultas cuja existência é oculta e imaginada, mas não provada; mas não aquelas cuja existência real está claramente demonstrada pelas observações. Portanto, a gravidade não pode, de forma alguma, ser chamada de causa oculta dos movimentos celestes, porque fica claro a partir dos fenômenos que tal poder existe realmente. São aqueles que recorrem a causas ocultas, estabelecendo vórtices imaginários de uma matéria inteiramente fictícia, e imperceptível aos nossos sentidos, para dirigir tais movimentos.

Mas a gravidade deve, por isso, ser chamada de causa oculta e banida da Filosofia por que a causa da gravidade está oculta e ainda não foi descoberta? Aqueles que afirmam isso devem ter cuidado para não incidir em um absurdo que pode subverter os fundamentos de toda a Filosofia. Pois as causas geralmente desenvolvem-se em uma cadeia contínua a partir daquelas que são mais complexas para aquelas que são mais simples; quando chegamos à causa mais simples não temos para onde prosseguir. Portanto, não se deve esperar nenhuma explicação mecânica da causa mais simples; porque se essa pudesse ser dada, a causa não seria a mais simples. Estas causas mais simples, você as chamaria de ocultas e as rejeitaria? Então você deve rejeitar aquelas que são imediatamente dependentes dessa e aquelas que dependem destas últimas, até que a filosofia se torne completamente livre e desimpedida de todas as causas.

Há quem afirme que a gravidade é sobrenatural e a considere um milagre perpétuo. Portanto, eles a rejeitariam porque as causas sobrenaturais não têm lugar na Física. Não vale a pena gastar tempo respondendo a

esta objeção ridícula que subverte toda a Filosofia. Porque eles irão negar que existe gravidade nos corpos, o que não pode ser dito, ou então, considera-la-ão sobrenatural porque não é produzida pelas outras propriedades dos corpos, e portanto, não é produzida por causas mecânicas. Mas certamente há propriedades primárias de corpos; e estas, porque são primárias, não dependem de outras. Deixemos a eles a decisão de considerar se todas essas propriedades são ou não sobrenaturais e se irão rejeitá-las ou não, decidindo assim que tipo de filosofia estamos inclinados a ter.

Há quem não goste dessa física celestial, porque contradiz as opiniões de *Descartes* e parece dificilmente reconciliável com elas. Deixemo-los regozijarem-se com sua própria opinião, mas que ajam honestamente e não nos neguem a mesma liberdade que exigem para si. Uma vez que a filosofia *newtoniana* nos parece verdadeira, que tenhamos a liberdade de abraçá-la e mantê-la, e perseguir as causas provadas pelos fenômenos, em vez das causas apenas imaginadas e ainda não provadas. O tema da verdadeira filosofia é derivar as naturezas das coisas a partir das causas verdadeiramente existentes, e indagar depois pelas leis que o Grande Criador realmente escolheu para assentar as bases desta maravilhosa Estrutura do Mundo, e não por aquelas com as quais Ele teria feito o mesmo, se assim o desejasse. É bastante razoável supor que a partir de várias causas um pouco diferentes umas das outras possa resultar o mesmo efeito; mas a verdadeira causa será aquela a partir da qual ele verdadeiramente e realmente surge; as outras não têm lugar na verdadeira Filosofia. O mesmo movimento do ponteiro do relógio pode ser ocasionado ou por um peso suspenso ou por uma mola localizada em seu interior. Mas se um certo relógio fosse realmente movido por um peso, deveríamos rir de um homem que acreditasse que fosse movido por uma mola e, a partir daquele princípio acolhido sem maior investigação, prosseguisse explicando o movimento do ponteiro; pois certamente o caminho a ser seguido seria olhar as partes internas da máquina para, então, encontrar o verdadeiro princípio do movimento proposto. O mesmo juízo deve ser feito daqueles filósofos que querem os céus cheios de uma matéria muito sutil continuamente revolvida em vórtices. Pois se eles pudessem explicar os fenômenos sempre tão precisamente por suas hipóteses, ainda assim não poderíamos dizer que descobriram a verdadeira Filosofia e as verdadeiras causas dos movimentos celestes, a menos que eles possam ou demonstrar que aquelas causas existem realmente, ou que, pelo menos existem outras. Portanto, se ficar claro que a atração de todos os corpos é uma propriedade que realmente existe *in rerum natura*, e também se for mostrado como os movimentos dos corpos celestes podem ser resolvidos por aquela proprieda-

de, seria muito impertinente, quem quer que fosse, objetar que estes movimentos devem ser explicados pelos vórtices; embora devamos considerar a possibilidade de tal explicação ser possível para aqueles movimentos. Mas não devemos permitir tal coisa, pois os fenômenos não podem ser explicados pelos vórtices, como nosso autor abundantemente provou pelas razões mais claras. Conclui-se assim que os homens são estranhamente adeptos de quimeras que gastam seu tempo inutilmente, remendando uma fantasia ridícula e realçando-a com seus próprios novos comentários.

Se os corpos dos planetas e cometas são arrastados em torno do Sol em vórtices, os corpos assim arrastados, e as partes dos vórtices que os circundam nas proximidades, devem ser arrastados com a mesma velocidade e a mesma direção, e ter a mesma densidade e a mesma inércia correspondendo ao volume da matéria. Mas é certo que os planetas e os cometas, quando exatamente nas mesmas partes dos céus, são arrastados com diferentes velocidades e direções. Portanto, segue necessariamente que aquelas partes do fluido celeste que estão às mesmas distâncias do Sol devem girar ao mesmo tempo com velocidades diferentes, em diferentes direções; porque um tipo de velocidade e direção é requerido para o movimento dos planetas e um outro para os cometas. Mas uma vez que isto não pode ser explicado satisfatoriamente, devemos afirmar ou que todos os corpos celestes não são arrastados pelos vórtices, ou, então, que seus movimentos são derivados não de um único vórtice, mas de vários e distintos vórtices que enchem e permeiam os espaços em torno do Sol.

Mas se vários vórtices estão contidos no mesmo espaço e tendem a penetrar um ao outro e girar com movimentos diferentes, então porque esses movimentos devem concordar com aqueles dos corpos arrastados por eles, que são perfeitamente regulares e realizados em seções cônicas que são, às vezes, bastante excêntricas e, às vezes, quase circulares, pode-se com bastante razão perguntar como pode acontecer que esses vórtices permaneçam inteiros e não sofram nenhum tipo de perturbação ao longo de tantas eras, devido às ações da matéria conflitante. Certamente se estes movimentos fictícios são mais complexos e difíceis de serem explicados do que os movimentos verdadeiros dos planetas e cometas, parece sem propósito admiti-los na filosofia, uma vez que toda causa deve ser mais simples do que seu efeito. Permitindo aos homens terem suas próprias fantasias, suponha que um homem qualquer afirmasse que os planetas e cometas são circundados por atmosferas como a nossa Terra, hipótese que parece mais razoável do que a dos vórtices; deixemos, então, que ele afirme que aquelas atmosferas, por sua própria natureza, movem-se em torno do Sol e descrevem seções côni-

cas cujo movimento é muito mais facilmente concebido do que o dos vórtices interpenetrantes; por último, que os planetas e cometas são levados em torno do Sol por suas atmosferas; e então aplaudir sua própria sagacidade em descobrir as causas dos movimentos celestes. Aquele que rejeita esta fábula deve também rejeitar a outra; porque duas gotas d'água não são mais parecidas do que esta hipótese das atmosferas e aquela dos vórtices.

Galileu mostrou que quando uma pedra projetada se move em uma parábola, sua deflexão naquela curva, a partir de sua trajetória retilínea, é ocasionada pela gravidade da pedra em direção à Terra, isto é, por uma qualidade oculta. Mas alguém mais esperto do que ele pode vir a explicar a causa da seguinte maneira: ele imaginará uma certa matéria sutil, não discernível pela visão, tato, ou qualquer outro dos sentidos, a qual preenche os espaços que são próximos e contíguos à superfície da Terra, e que esta matéria é arrastada em direções diferentes e com movimentos variados, freqüentemente contrários, descrevendo curvas parabólicas. Então veja com que facilidade ele pode explicar a deflexão da pedra mencionada acima. A pedra, diz ele, flutua neste fluido sutil e seguindo seu movimento não tem escapatória, a não ser descrever a mesma figura. Mas o fluido move-se em curvas parabólicas e, portanto, a pedra deve mover-se em uma parábola, é claro. Não fosse a esperteza deste filósofo considerada muito extraordinária, quem poderia deduzir as aparências da natureza a partir de causas mecânicas, matéria e movimento, tão claramente que o homem mais obtuso pudesse entendê-la? Ou, em verdade, não deveríamos sorrir ao ver este novo Galileu despendendo tanto esforço matemático para introduzir as qualidades ocultas na filosofia, da qual haviam sido felizmente excluídas? Mas tenho vergonha de demorar-me tanto com ninharias.

O resumo do assunto é este: o número de cometas é certamente muito grande; seus movimentos são perfeitamente regulares e seguem as mesmas leis que aquelas dos planetas. As órbitas nas quais se movem são seções cônicas de tipo muito excêntrico. Eles se movem por todas as partes dos céus e atravessam as regiões planetárias com toda liberdade possível, e seus movimentos são, freqüentemente, contrários à ordem dos sinais. Esses fenômenos são mais evidentemente confirmados pelas observações astronômicas e não podem ser explicados satisfatoriamente pelos vórtices. Não somente isso, na verdade eles são inteiramente irreconciliáveis com os vórtices dos planetas. Não pode haver lugar para os movimentos dos cometas, a menos que os espaços celestes sejam inteiramente livres daquela matéria fictícia.

Pois se os planetas são arrastados em torno do Sol em vórtices, as partes dos vórtices que imediatamente circundam cada planeta devem ter a

mesma densidade que o planeta, como foi mostrado acima. Portanto, toda matéria contígua ao perímetro da órbita da Terra[3] deve ter a mesma densidade que a Terra. Mas esta grande orbe e a orbe de Saturno devem ter uma densidade igual ou maior, porque para tornar a constituição do vórtice permanente, as partes de menor densidade devem situar-se próximas ao centro e aquelas de maior densidade devem afastar-se dele. Pois uma vez que os tempos periódicos dos planetas variam com potência 3/2 de suas distâncias do Sol, os períodos das partes dos vórtices também devem preservar a mesma razão. Então, segue que as forças centrífugas das partes dos vórtices devem ser inversamente como o quadrado de suas distâncias. Portanto, aquelas partes que são mais distantes do centro tendem a se afastar dele com menor força; assim, se suas densidades forem deficientes, devem ceder à força maior com a qual as partes que se situam mais próximas do centro tendem a ascender. Portanto, as partes mais densas subirão e aquelas de menor densidade descerão, e haverá uma troca mútua de lugares, até que toda a matéria fluida no vórtice inteiro seja ajustada e disposta de tal maneira que, sendo reduzidas a um equilíbrio, suas partes tornem-se quiescentes. Se dois fluidos de diferentes densidades forem colocados no mesmo recipiente, certamente ocorrerá que o fluido de maior densidade irá comprimir o de menor; e por um raciocínio semelhante, segue que as partes mais densas do vórtice, pela sua maior força centrífuga, subirão para os lugares mais altos. Assim, aquela maior parte do vórtice que se encontra fora da orbe da Terra terá uma densidade e, conseqüentemente, uma inércia correspondente ao volume da matéria, que não pode ser menor do que a densidade e a inércia da Terra. Mas daí surgirá uma vigorosa resistência à passagem dos cometas, que será muito significativa, para não dizer suficiente para frear e absorver inteiramente seus movimentos. Mas constata-se pelo movimento perfeitamente regular dos cometas que eles não sofrem nenhuma resistência que seja no mínimo significativa e, portanto, não se deparam com matéria de qualquer tipo que tenha qualquer força resistente ou, conseqüentemente, qualquer densidade ou inércia. Pois a resistência de meios surge, ou da inércia da matéria do fluido ou da sua necessidade de lubricidade. Aquela que resulta da falta de lubricidade é bem pequena e quase não é observada nos fluidos comumente conhecidos, a menos que sejam ambos viscosos como o óleo e o mel. A resistência que encontramos no ar, na água, no mercúrio e nos fluidos semelhantes que não são viscosos, é quase que toda do primeiro tipo e não pode ser reduzida por um grau maior de sutileza, se a densidade e a inércia,

3. Ver nota 7 do Apêndice.

às quais esta resistência é proporcional, mantiverem-se, como é evidentemente demonstrado por nosso autor na sua esplêndida teoria das resistências, no segundo Livro.

Os corpos, ao atravessarem um fluido, comunicam seu movimento a este aos poucos, e por esta transferência perdem seu próprio movimento e, ao perdê-lo, são retardados. Portanto, o retardo é proporcional ao movimento comunicado, e este, quando a velocidade do móvel é conhecida, é como a densidade do fluido; assim, o retardo ou resistência será igual à própria densidade do fluido; a resistência não pode tampouco ser retirada, a menos que o fluido, ocupando as regiões posteriores do corpo, estabeleça o movimento perdido. Por outro lado, isto não pode ser feito a menos que a força imprimida pelo fluido nas regiões posteriores do corpo seja igual à força imprimida pelas partes anteriores do corpo no fluido; isto é, a menos que a velocidade relativa com a qual o fluido empurra o corpo seja igual à velocidade com a qual o corpo empurra o fluido; ou seja, a menos que a velocidade absoluta do fluido recorrente seja duas vezes maior do que a velocidade absoluta com a qual o fluido é impulsionado para frente pelo corpo, o que é impossível. Portanto, a resistência dos fluidos originada de suas inércias não pode ser eliminada de forma alguma. Assim, devemos concluir que o fluido celeste não tem inércia, por não ter força existente; não tem força para comunicar movimento, por não ter inércia; não tem força para produzir qualquer mudança em um ou mais corpos, por não ter força com a qual comunicar movimento; não tem absolutamente qualquer eficácia, por não ter qualquer qualidade com a qual possa produzir mudança de qualquer espécie. Portanto, certamente esta hipótese pode ser merecidamente chamada de ridícula e de desprezível para um filósofo, uma vez que é totalmente sem fundamento e não serve nem mesmo para explicar a natureza das coisas[4]. Aqueles que concebem os céus preenchidos com uma matéria fluida, mas a supõem destituída de qualquer inércia, negam o vácuo em palavras, mas o admitem de fato. Pois uma vez que uma matéria fluida desta espécie não pode ser diferenciada de forma alguma do espaço vazio, a disputa é agora sobre nomes e não sobre a natureza das coisas. Mas se os aficcionados da matéria não admitirem de maneira alguma um espaço vazio de *corpos*, *vejamos*, então, onde por fim chegarão.

Pois ou eles dirão que esta constituição de um mundo preenchido em todos os lugares foi assim concebida pela vontade de Deus para este fim, de forma que as operações da natureza possam ser auxiliadas em todo lu-

4. Ver nota 8 do Apêndice.

gar por um éter sutil que permeia e preenche todas as coisas; o que não pode ser dito, entretanto, pois mostramos, a partir do fenômeno dos cometas, que este éter não é de forma alguma eficaz; ou dirão que assim o é pela mesma vontade de Deus, devido a alguma finalidade desconhecida, que não pode ser revelada, porque por esta mesma razão uma constituição diferente pode ser igualmente suposta; ou finalmente, não dirão que é causada pela vontade de Deus, mas por alguma necessidade de sua natureza. Portanto, finalmente afundar-se-ão na lama daquele vulgo infame que sonha que todas as coisas são governadas pelo destino e não pela providência, e que a matéria existe pela necessidade de sua natureza sempre e em todo lugar, sendo infinita e eterna. Mas, supondo-se isto, ela deve ser uniforme em todo lugar, pois a variedade de formas é inteiramente inconsistente com a necessidade. Também deve ser imóvel; caso necessariamente se movesse em uma determinada direção com qualquer velocidade, seria móvel por uma necessidade semelhante em uma direção diferente, com uma velocidade diferente; mas nunca poderá se mover em direções diferentes com velocidades diferentes; portanto, deve ser imóvel. Sem qualquer dúvida, este mundo tão diversificado, com essa variedade de formas e movimentos que nele encontramos, não poderia ter outra origem que não o livre-arbítrio de Deus dirigindo e presidindo tudo.

É desta fonte que aquelas leis, que chamamos leis da Natureza, fluíram, nas quais aparecem muitos traços da maior engenhosidade, mas sem a menor sombra de necessidade. Portanto, não devemos buscar estas leis a partir de conjecturas incertas, mas aprendê-las com base em observações e experimentos. Aquele que for suficientemente presunçoso para pensar que pode encontrar os verdadeiros princípios da física e as leis das coisas naturais apenas pela força de sua própria mente e pela luz interna de sua razão, deve supor ou que o mundo existe por necessidade e, pela mesma necessidade, segue as leis propostas; ou se a ordem da natureza foi estabelecida pela vontade de Deus, que ele, um miserável réptil, possa dizer o que era mais adequado de ter sido feito. Toda verdadeira filosofia fundamenta-se nas aparências das coisas, e se estes fenômenos inevitavelmente nos levam, contra nossas vontades, para tais princípios, como claramente evidenciou para nós o melhor conselho e a autoridade suprema do Onisciente e Todo-Poderoso, não devem, portanto, ser deixadas de lado porque alguns homens podem talvez não gostar dela. Esses homens podem chamá-las de milagres ou qualidade ocultas, mas nomes maliciosamente dados não devem ser uma desvantagem para as coisas, a menos que esses homens digam, por fim, que toda filosofia deva ser fundada no ateísmo. A filosofia não deve ser

corrompida em cumplicidade com esses homens, pois a ordem das coisas não será mudada.

Julgamentos justos e equânimes darão, portanto, uma sentença favorável a este excelente método de filosofia, que se fundamenta em experimentos e observações. Dificilmente pode ser explicado ou imaginado quanta luz, quanto esplendor surgiu do método deste admirável trabalho de nosso ilustre autor, cujo sublime gênio, resolvendo os problemas mais difíceis, e chegando a descobertas das quais a mente do homem era antes julgada incapaz, é merecidamente admirado por aqueles que são pouco mais do que superficialmente versados nessa matéria. Os portões estão, agora, abertos, e pela passagem que se revelou podemos penetrar livremente no conhecimento dos segredos e das maravilhas escondidas da natureza. Ele desvendou tão claramente aos nossos olhos a mais bela estrutura do Sistema do Mundo, que se o rei *Alphonso* estivesse vivo não lamentaria pela falta de belezas, seja de simplicidade, seja de harmonia nela. Podemos, portanto, contemplar mais de perto as belezas da natureza e entretermo-nos com a agradável contemplação; e, o que é melhor e o mais valioso fruto da filosofia, seja, então, incitado o mais profundamente a reverenciar e adorar o Grande Criador e Senhor de tudo. Deve ser cego aquele que, a partir da mais sábia e excelente concepção das coisas, não conseguir enxergar a sabedoria e bondade do seu Criador Todo-Poderoso, e deve ser louco e insensível aquele que se recusar a reconhecê-las.

O eminente trabalho de *Newton* será a proteção mais segura contra os ataques dos ateus, e não há nenhum outro lugar mais correto do que esta aljava, para se lançar flechas contra o bando de homens ímpios. Isto foi sentido há muito tempo e pela primeira vez surpreendentemente demonstrado em eruditos discursos em inglês e latim por *Richard Bentley*, que imbatível no conhecimento e distinguindo-se como patrono das artes mais elevadas, é um grande ornamento do seu século e da nossa academia, o extremamente ilustre e íntegro mestre do nosso *Trinity College*. Devo expressar-lhe minha gratidão de variadas maneiras. E você também, leitor benevolente, não deve conter sua estima devida a ele. Por muitos anos amigo íntimo do celebrado autor (uma vez que ele almejava não apenas que o autor fosse estimado por aqueles que o sucedessem, mas também que aqueles escritos notáveis gozassem distinção entre os literatos do mundo), ele preocupava-se tanto pela reputação de seu amigo quanto pelo progresso das ciências. Uma vez que as cópias da edição anterior eram muito escassas e caras, ele persuadiu, através de súplicas e quase que por censuras, o esplêndido homem, distinto por sua modéstia e erudição, a dar-lhe permissão para o aparecimento desta nova

edição, inteiramente revista e enriquecida com novas partes, às suas expensas e sob sua supervisão. Ele atribuiu a mim, como era seu direito, a grata tarefa de corrigi-la o melhor que pudesse.

ROGER COTES

Membro do Trinity College,
Professor Catedrático de Astronomia e
Filosofia Experimental.
Cambridge, 12 de maio de 1713.

» PREFÁCIO DE NEWTON À TERCEIRA EDIÇÃO

Nesta terceira edição, preparada com muito cuidado por *Henry Pemberton,* M.D.*, homem da maior competência nesses assuntos, algumas coisas no segundo Livro sobre a resistência dos meios são tratadas mais abrangentemente do que antes, e novos experimentos sobre a resistência de corpos pesados que caem no ar são acrescentados. No terceiro Livro, o, argumento que prova que a Lua é retida em sua órbita pela força da gravidade é apresentado de maneira mais completa e há o acréscimo de novas observações feitas pelo Sr. *Pound,* referentes à razão dos diâmetros de Júpiter. São acrescentadas também algumas observações sobre o cometa que apareceu no ano de 1680, feitas na *Alemanha,* no mês de *novembro,* pelo Sr. *Kirk;* que chegaram tardiamente às minhas mãos. Com o auxílio dessas, torna-se evidente quão aproximadamente as órbitas parabólicas representam os movimentos dos cometas. A órbita daquele cometa é determinada um pouco mais rigorosamente do que antes, pelo cálculo do Dr. *Halley,* em uma elipse. E mostra-se que, nessa órbita elíptica, o cometa seguiu seu curso através dos nove sinais dos céus, com tanto rigor quanto os planetas se movem nas órbi-

* Abreviação de *Doctor of Medicine*

tas elípticas consideradas na astronomia. A órbita do cometa que apareceu no ano de 1723 também é acrescentada, calculada pelo Sr. *Bradley*, professor de Astronomia em *Oxford*[1].

Is. Newton

Londres, 12 de janeiro de 1725-6

1. Ver nota 9 do Apêndice.

» PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS DE FILOSOFIA NATURAL[1]

Definições

DEFINIÇÃO I

A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume[2].

Assim, o ar, com o dobro de densidade, num espaço duplicado, tem o quádruplo da quantidade; num espaço triplicado, o sêxtuplo da quantidade. O mesmo deve ser entendido com respeito à neve, e pó fino ou matéria pulverizada, condensados por compressão ou liquefação, bem como para todos os corpos que, por quaisquer causas, são condensados diferentemente. Não me refiro, aqui, a um meio, se é possível dizer que tal meio existe, que permeia livremente os interstícios entre as partes dos corpos. É essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. E a mesma é conhecida através do peso de cada corpo, pois é proporcional ao peso, como descobri em experimentos com pêndulos, realizados muito rigorosamente, os quais serão mostrados adiante.

1. Ver nota 10 do Apêndice.
2. Ver nota 11 do Apêndice.

DEFINIÇÃO II[3]

A quantidade de movimento é a medida do mesmo, obtida conjuntamente a partir da velocidade e da quantidade de matéria.

O movimento* do todo é a soma dos movimentos de todas as partes; portanto, em um corpo com o dobro da quantidade, com igual velocidade, o movimento é duplo; com o dobro da velocidade, é quádruplo.

DEFINIÇÃO III

A vis insita, *ou força inata da matéria, é um poder de resistir, através do qual todo o corpo, no que depende dele, mantém seu estado presente, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em linha reta.*

Essa força é sempre proporcional ao corpo ao qual ela pertence, e em nada difere da inatividade da massa, a não ser pela nossa maneira de concebê-la. A partir da natureza inerte da matéria, um corpo não tem seu estado de repouso ou movimento facilmente alterado. Nesse sentido, essa *vis insita* pode, por um nome mais apropriado, ser chamada inércia (*vis inertiae*) ou força de inatividade. Mas um corpo só exerce essa força quando outra força, imprimida sobre ele, procura mudar sua condição; e o exercício dessa força pode ser considerado tanto como resistência quanto como impulso; resistência na medida em que, para conservar seu estado, o corpo opõe-se à força imprimida; e impulso na medida em que o corpo, não cedendo facilmente à força imprimida por um outro, esforça-se para mudar o estado deste outro corpo. Resistência é normalmente atribuída a corpos em repouso, e o impulso àqueles em movimento; mas movimento e repouso, como vulgarmente concebidos, diferem apenas relativamente um do outro; nem esses corpos estão sempre verdadeiramente em repouso, como vulgarmente são considerados.

3. Ver nota 12 do Apêndice.
* No original, *motion*, significando "quantidade de movimento" (N. T.).

DEFINIÇÃO IV

Uma força imprimida é uma ação exercida sobre um corpo a fim de alterar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme em uma linha reta.

Essa força consiste apenas na ação, e não permanece no corpo quando termina a ação. Pois um corpo mantém todo novo estado que ele adquire, somente por sua inércia. Mas as forças imprimidas têm origens diferentes, tais como de percussão, de pressão e de força centrípeta.

DEFINIÇÃO V

Uma força centrípeta é aquela pela qual os corpos são dirigidos ou impelidos, ou tendem, de qualquer maneira, para um ponto ou centro.

São forças desse tipo: a gravidade, pela qual os corpos tendem para o centro da Terra; o magnetismo, pelo qual o ferro tende para a magnetita; e aquela força, seja qual for, pela qual os planetas são continuamente desviados dos movimentos retilíneos – os quais, em caso contrário, eles perseguiriam – e obrigados a revolucionar em órbitas curvilíneas. Uma pedra, girada numa funda, tende a escapar da mão que gira, e, por este esforço, distende a funda, e o faz com força maior à medida que é girada com velocidade maior, e assim que é liberada, voa para longe. À força que se opõe a este esforço, e pela qual a funda puxa continuamente a pedra de volta para a mão e a mantém em sua órbita, por ser dirigida para a mão como o centro da órbita, chamo de força centrípeta. O mesmo deve ser dito com relação a todos os corpos que girem em quaisquer órbitas. Todos tendem a se afastar dos centros de suas órbitas; e se não fosse pela força contrária que o restringe e os detém em suas órbitas, que, portanto, chamo de centrípeta, voariam para longe em linha reta, com um movimento uniforme. Se não fosse pela força da gravidade, um projétil não se desviaria em direção à Terra, mas afastar-se-ia dela em linha reta, com movimento uniforme, se a resistência do ar fosse removida. É por sua gravidade que ele é desviado continuamente de seu curso retilíneo e forçado a desviar-se em direção à Terra, mais ou menos de acordo com a força de sua gravidade e a velocidade de seu movimento. Quanto menor for sua gravidade, ou sua quantidade de matéria, ou quanto maior for a velocidade com a qual é arremessado, menos ele se desviará de uma trajetória retilínea, e mais longe irá. Se uma bola de chumbo arremes-

sada do topo de uma montanha pelo uso de pólvora, com uma dada velocidade e em uma direção paralela ao horizonte, é levada a uma distância de duas milhas em uma linha curva, antes de cair ao chão; a mesma bola, se a resistência do ar fosse removida, lançada com o dobro ou décuplo da velocidade, voaria duas ou dez vezes mais longe. Aumentando a velocidade, podemos aumentar arbitrariamente a distância à qual ela poderia ser arremessada, e diminuir a curvatura da linha que ela descreveria, até que finalmente ela cairia a uma distância de 10, 30 ou 90 graus, ou mesmo poderia dar a volta ao redor da Terra antes de cair; ou finalmente, poderia nunca mais cair na Terra, mas iria em frente, penetrando nos espaços celestes, e continuaria com seu movimento *in infinitum.* Da mesma forma que um projétil, pela força da gravidade, pode ser forçado a girar em uma órbita e contornar completamente a Terra, também a Lua, quer pela força da gravidade, se ela for dotada de gravidade, ou por qualquer outra força, que a impulsione para a Terra, pode ser continuamente desviada em direção à Terra, para fora do caminho retilíneo que, pela sua força inata, ela perseguiria; e seria forçada a girar na órbita que agora descreve; sem a existência de uma tal força, a Lua não poderia ser retida na sua órbita. Se essa fosse muito pequena, ela não seria suficiente para remover a Lua de um curso retilíneo; se fosse muito grande, a Lua seria desviada demais de sua órbita e cairia na Terra. É necessário que a força seja de uma quantidade precisa, e cabe aos matemáticos encontrar a força que pode servir exatamente para reter um corpo em uma determinada órbita, com uma dada velocidade; e *vice versa,* determinar a curva descrita por um corpo quando desviado de seu curso retilíneo natural por meio de uma força dada, ao ser arremessado de um dado lugar, com uma dada velocidade.

A quantidade de qualquer força centrípeta poder ser de três tipos: absoluta, acelerativa e motora.

Definição VI

A quantidade absoluta de uma força centrípeta é a medida da mesma, proporcional à eficácia da causa que a propaga a partir do centro, através dos espaços ao seu redor.

Assim, a força magnética é maior em uma magnetita e menor em outra, dependendo de seus tamanhos e força de intensidade.

DEFINIÇÃO VII

A quantidade acelerativa de uma força centrípeta é a medida da mesma, proporcional à velocidade que ela gera em um dado tempo.

Assim, a força da mesma magnetita é maior a uma distância menor, e menor a uma distância maior; também a força da gravidade é maior em vales, e menor nos cumes de montanhas extremamente altas; e ainda menor (como será mostrado mais adiante), quanto mais afastado se estiver da Terra; mas, em distâncias iguais, é a mesma em todos os lugares, pois (removendo, ou descontando, a resistência do ar), ela acelera igualmente todos os corpos que caem, sejam pesados ou leves, grandes ou pequenos.

DEFINIÇÃO VIII

A quantidade motora de uma força centrípeta é a medida da mesma, proporcional ao movimento que ela gera em um dado tempo.

Assim, o peso é maior em um corpo maior e menor em um corpo menor; e, em um mesmo corpo, é maior próximo à Terra e menor a distâncias maiores. Esse tipo de quantidade é a centripetência*, propensão do corpo em direção ao, como prefiro dizer, seu peso; e é sempre determinada pela quantidade de uma força igual apenas o suficiente para impedir a queda do corpo.

A essas quantidades de forças podemos chamar, para sermos breves, pelos nomes de força motora, acelerativa e absoluta; e para fins de distinção, podemos considerá-las com relação aos corpos que tendem para o centro, aos lugares desses corpos e ao centro de força para o qual eles tendem; isto é, atribuo a força motora ao corpo como um esforço e propensão do todo em direção a um centro, surgindo das propensões das diversas partes tomadas em conjunto; a força acelerativa ao lugar do corpo, como um certo poder difundido do centro para todos os lugares ao redor para mover os corpos que aí estiverem; e a força absoluta ao centro, enquanto dotado de alguma causa sem a qual aquelas forças motoras não se propagariam pelos espaços circundantes; seja aquela causa um corpo central (tal como é o ímã no centro da força magnética ou a Terra no centro da força gravitacional), ou

* No original, em latim, *centripetentia* (N. T.).

qualquer outra coisa ainda não revelada. Pois pretendo aqui apenas oferecer uma noção matemática daquelas forças, sem considerar suas causas e posições físicas. Portanto, a força acelerativa manterá a mesma relação com a motora que a celeridade tem com o movimento. Pois a quantidade de movimento é o produto da celeridade pela quantidade de matéria; e a força motora origina-se da multiplicação da força acelerativa pela mesma quantidade de matéria. E a soma das ações da força acelerativa sobre as várias partículas do corpo é a força motora do todo. Assim é que, próximo à superfície da Terra, onde a gravidade acelerativa ou a força que produz a gravidade em todos os corpos é a mesma, a gravidade motora ou o peso é igual ao corpo. Mas se subíssemos a regiões mais altas, onde a gravidade acelerativa é menor, o peso seria da mesma maneira diminuído, e seria sempre o produto do corpo pela gravidade acelerativa. Nessas regiões, onde a gravidade acelerativa é diminuída pela metade, o peso de um corpo duas ou três vezes menor, será quatro ou seis vezes menor.

Da mesma forma, denomino atrações e impulsos de acelerativos e motores, e uso as palavras atração, impulso, ou propensão de qualquer tipo na direção de um centro, indistintamente; considerando aquelas forças, não fisicamente, mas matematicamente. Portanto, o leitor não deve imaginar que, por estas palavras, eu queira definir em qualquer parte do texto o tipo, ou o modo de qualquer ação, suas causas ou razões físicas, ou que atribua forças, em um sentido exato e físico, a centros (que são apenas pontos matemáticos) quando me referir a centros como atrativos ou como dotados de poderes atrativos.

Escólio[4]

Até aqui estabeleci as definições dos termos acima do modo como eles são menos conhecidos e expliquei o sentido no qual eles devem ser entendidos no que segue. Não defino tempo, espaço, lugar e movimento por serem bem conhecidos de todos. Contudo, admito que o leigo não concebe essas quantidades sob outras noções, exceto a partir das relações que elas guardam com objetos perceptíveis. Daí surgem certos preconceitos, para a remoção dos quais será conveniente distingui-las entre absolutas e relativas, verdadeiras e aparentes, matemáticas e comuns.

4. Ver nota 13 do Apêndice.

I – O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e por sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração. O tempo comum aparente e relativo é uma medida de duração perceptível e externa (seja ela exata ou irregular) que é obtida por meio de movimento e que é normalmente usada no lugar do tempo verdadeiro, tal como uma hora, um dia, um mês, um ano.

II – O espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos, a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação aos corpos, e é comumente tomado por espaço imóvel; assim é a dimensão de um espaço subterrâneo, aéreo ou celeste, determinado pela sua posição com relação à Terra. Espaços absoluto e relativo são os mesmos em configuração e magnitude, mas não permanecem sempre numericamente iguais. Pois, por exemplo, se a Terra se move, um espaço de nosso ar, o qual relativamente à Terra permanece sempre o mesmo, será em algum momento parte do espaço absoluto pelo qual o ar passa; em um outro momento será outra parte do mesmo, e assim, com certeza, estará continuamente mudando.

III – Lugar é uma parte do espaço que um corpo ocupa, e de acordo com o espaço, é ou absoluto ou relativo. Digo parte do espaço, e não situação, nem superfície externa do corpo. Pois os lugares de sólidos iguais são sempre iguais, mas suas superfícies, em função de suas formas diferentes, são freqüentemente desiguais. As posições propriamente não têm quantidade, e nem são os próprios lugares, mas antes propriedades dos lugares. O movimento do todo é o mesmo que a soma dos movimentos das partes; isto é, a translação do todo, de seu lugar, é a mesma que a soma das translações das partes para fora de seus lugares; e, portanto, o lugar do todo é o mesmo que a soma dos lugares das partes, e por essa razão, é interno e está em todo o corpo.

IV – Movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro; e movimento relativo, a translação de um lugar relativo para outro. Assim, em um navio que está navegando, o lugar relativo de um corpo é aquela parte do navio que o corpo ocupa; ou aquela parte da cavidade que o corpo preenche, e que, portanto, move-se junto com o navio; repouso relativo é a permanência do corpo naquela mesma parte do navio ou de sua cavidade. Mas repouso real, absoluto, é a permanência do corpo na mesma parte daquele espaço imóvel, no qual o próprio navio, sua cavidade e tudo o que ele contém, se move. Por essa razão, se a Terra está realmente em repouso, o corpo que está relativamente em repouso no navio, real e

absolutamente se moverá com a mesma velocidade que o navio tem na Terra. Mas se a Terra também se mover, surgirá o movimento verdadeiro e absoluto do corpo, em parte devido ao movimento verdadeiro da Terra, em espaço imóvel, e em parte devido ao movimento relativo do navio na Terra; e se o corpo também tem movimento relativo no navio, seu movimento verdadeiro surgirá, parcialmente devido ao movimento verdadeiro da Terra, em espaço imóvel, e parcialmente devido aos movimentos relativos, tanto do navio na Terra como do corpo no navio e, desses movimentos, surgirá o movimento relativo do corpo na Terra. Assim, se aquela parte da Terra onde está o navio, fosse de fato, levada na direção leste, com uma velocidade de 10.010 partes, enquanto o navio propriamente dito, com velas desfraldadas por um forte vento, fosse levado para oeste, com uma velocidade expressa por dez daquelas partes, um marinheiro caminhando, no navio na direção leste, com uma parte da velocidade mencionada, vai ser levado, de fato, através do espaço imóvel na direção leste, com uma velocidade de 10.001 partes, e relativamente na Terra na direção oeste, com uma velocidade de nove daquelas partes.

Tempo absoluto, em astronomia, é distinguido do tempo relativo, pela equação ou correção do tempo aparente, porque os dias naturais são de fato desiguais, apesar de serem comumente considerados como iguais e usados como uma medida de tempo. Os astrônomos corrigem essa desigualdade, para que possam medir os movimentos celestes por um tempo mais rigoroso. Pode ser que não haja algo como movimento uniforme, por meio do qual o tempo possa ser rigorosamente medido. Todos os movimentos podem ser acelerados e retardados, mas o fluxo de tempo absoluto não é passível de mudanças. A duração ou perseverança da existência das coisas permanece a mesma, sejam os movimentos rápidos ou lentos, ou até completamente nulos. E, portanto, essa duração deve ser distinguida daquelas que são apenas suas medidas perceptíveis, a partir das quais aquela é deduzida através da equação astronômica. A necessidade dessa equação para determinar os tempos de um fenômeno é evidenciada tanto a partir de experimentos com relógios de pêndulo, como pelos eclipses dos satélites de Júpiter.

Da mesma forma como a ordem das partes do tempo é imutável, assim também o é a ordem das partes do espaço. Supondo-se que essas partes sejam deslocadas de seus lugares, elas também serão deslocadas (se for possível usar tal expressão) de si mesmas. Pois é como se tempos e espaços fossem lugares tanto de si mesmos como de todas as outras coisas. Todas as coisas são colocadas no tempo de acordo com uma ordem de sucessão; e no

espaço, de acordo com uma ordem de situação. É de sua essência ou natureza que elas sejam lugares, e é absurdo dizer que os lugares iniciais das coisas sejam móveis. Esses, portanto, são os lugares absolutos, e as translações a partir desses lugares são os únicos movimentos absolutos.

Uma vez que as partes do espaço não podem ser vistas ou diferenciadas umas das outras pelos nossos sentidos, usamos medidas perceptíveis delas. Com efeito, das posições e distâncias das coisas a partir de qualquer corpo considerado imóvel, definimos todos os lugares, e, então, com relação a tais lugares, estimamos todos os movimentos, considerando os corpos como transferidos de alguns destes lugares para outros. Assim, em vez de lugares e movimentos absolutos, usamos relativos, e isto sem qualquer inconveniente prático; mas em investigações filosóficas, devemos abstrair de nossos sentidos e considerar as coisas em si mesmas, distintas daquilo que são tão-somente suas medidas perceptíveis. Pois pode ser que não haja um corpo realmente em repouso, com relação ao qual os lugares e movimentos de outros possam ser referidos.

Mas podemos diferenciar repouso e movimento, absoluto e relativo, por suas propriedades, causas e efeitos. É uma propriedade do repouso que os corpos realmente em repouso repousem uns com relação aos outros. E, portanto, é possível que nas regiões remotas das estrelas fixas, ou talvez muito além delas, possa haver algum corpo em repouso absoluto; mas como é impossível saber, a partir das posições dos corpos uns com relação aos outros nas nossas regiões, se qualquer deles mantém a mesma posição com relação àquele corpo remoto, conclui-se que repouso absoluto não pode ser determinado a partir da posição dos corpos nas nossas regiões.

É uma propriedade do movimento que as partes, as quais guardam determinadas posições com relação a seus todos, realmente compartilhem dos movimentos desses todos. Pois todas as partes dos corpos que giram tendem a se afastar do eixo de movimento; e o ímpeto dos corpos que se movem para a frente origina-se do ímpeto conjunto de todas as partes. Logo, se corpos vizinhos são movidos, aqueles que estão em repouso relativo dentre eles compartilharão de seu movimento. Por essa razão, o movimento verdadeiro e absoluto de um corpo não pode ser determinado por sua translação a partir daqueles que apenas parecem estar em repouso; pois os corpos externos não apenas devem aparentar estar em repouso, mas estar realmente em repouso. Pois, por outro lado, todos os corpos que estão incluídos, além de sua translação nas proximidades dos corpos vizinhos, compartilham, da mesma forma, de seus movimentos verdadeiros; e mesmo que a translação não fosse feita, eles não estariam realmente em repouso,

mas apenas aparentariam estar. Pois os corpos circundantes mantém uma relação com os circundados, que é semelhante à que a parte exterior de um todo mantém com seu interior, ou que o invólucro mantém com seu núcleo; mas se o invólucro mover-se, o núcleo também se moverá, como parte do todo, sem se afastar do invólucro.

Uma propriedade similar à precedente é que se o lugar é movido, o que for colocado ali dentro se move junto com ele; e, portanto, um corpo que é movido do seu lugar. Por essa razão, todos os movimentos a partir de lugares em movimento são nada mais do que partes de movimentos inteiros e absolutos; e qualquer movimento inteiro é composto pelo movimento do corpo para fora de seu lugar original e pelo movimento desse lugar para fora de seu lugar; e assim por diante, até atingirmos algum lugar imóvel, como no exemplo do marinheiro, mencionado anteriormente. Por essa razão, movimentos inteiros e absolutos não podem ser determinados por outra forma que não seja por lugares imóveis; e por essa razão, relacionei anteriormente aqueles movimentos absolutos a lugares imóveis, mas relativos, a lugares móveis. Agora, nenhum outro lugar é imóvel, com exceção daqueles que, por todo o espaço infinito, mantém uma mesma posição uns para os outros; e, por essa razão, devem sempre permanecer imóveis, e assim, realmente constituem espaço imóvel.

As causas pelas quais os movimentos verdadeiros e relativos são diferenciados, um do outro, são as forças imprimidas sobre os corpos para gerar movimento. O movimento verdadeiro não é nem gerado nem alterado, a não ser por alguma força imprimida sobre o corpo movido; mas o movimento relativo pode ser gerado ou alterado sem qualquer força imprimida sobre o corpo. Pois é suficiente apenas exercer alguma força sobre os outros corpos com os quais o primeiro é comparado, pois quando eles se deslocarem, aquela relação, em que consistia o repouso ou movimento relativo desse outro corpo, é modificada. Repetindo, movimento verdadeiro sofre sempre alguma modificação a partir de qualquer força exercida sobre o corpo em movimento; mas movimento relativo não sofre necessariamente qualquer modificação por tais forças. Pois se as mesmas forças são igualmente exercidas sobre aqueles outros corpos, com os quais a comparação é feita, tal que sua posição relativa possa ser preservada, então aquela condição que consistia em movimento relativo será preservada. E, portanto, qualquer movimento relativo pode ser modificado quando o movimento verdadeiro permanece inalterado, e o relativo pode ser preservado quando o verdadeiro sofre qualquer modificação. Assim, o movimento verdadeiro, de modo algum, consiste em tais relações.

Os efeitos que distinguem o movimento absoluto do relativo são as forças que agem no sentido de provocar um afastamento a partir do eixo do movimento circular, pois não há tais forças em um movimento circular meramente relativo; mas em um movimento circular verdadeiro e absoluto elas são maiores ou menores, dependendo da quantidade do movimento. Se um recipiente, suspenso por uma longa corda, é tantas vezes girado, a ponto de a corda ficar fortemente torcida, e então enchido com água e suspenso em repouso junto com a água; a seguir, pela ação repentina de outra força, é girado para o lado contrário e, enquanto a corda desenrola-se, o recipiente continua nesse movimento por algum tempo; a superfície da água, de início, será plana, como antes de o recipiente começar a se mover; mas depois disso, o recipiente, por comunicar gradualmente o seu movimento à água, fará com que ela comece nitidamente a girar e a se afastar pouco a pouco do meio e a subir pelos lados do recipiente, transformando-se em uma figura côncava (conforme eu mesmo experimentei), e quanto mais rápido se torna o movimento, mais a água vai subir, até que, finalmente, realizando suas rotações nos mesmos tempos que o recipiente, ela fica em repouso relativo nele. Essa subida da água mostra seu esforço a se afastar do eixo de seu movimento; e o movimento circular verdadeiro e absoluto da água, que aqui é diretamente contrário ao relativo, torna-se conhecido e pode ser medido por este esforço. De início, quando o movimento relativo da água no recipiente era máximo, não havia nenhum esforço para se afastar do eixo; a água não mostrava nenhuma tendência à circunferência, nem ascendia em direção aos lados do recipiente, mas mantinha uma superfície plana, e, portanto, seu movimento circular verdadeiro ainda não havia começado. Mas, posteriormente, quando o movimento relativo da água havia diminuído, a subida em direção aos lados do recipiente mostrou o esforço dessa para se afastar do eixo; e esse esforço mostrou o movimento circular real da água aumentando continuamente, até adquirir sua maior quantidade, quando a água ficou em repouso relativo no recipiente. E, portanto, esse esforço não depende de qualquer translação da água com relação aos corpos do ambiente, nem pode o movimento circular verdadeiro ser definido por tal translação. Há somente um movimento circular real de qualquer corpo em rotação, correspondendo a um único poder de tendência de afastamento, a partir de seu eixo de movimento, como efeito próprio e adequado; mas movimentos relativos, em um mesmo e único corpo, são inumeráveis, de acordo com as diferentes relações que ele mantém com corpos externos e, como outras relações, são completamente destituídas de qualquer efeito real, embora eles possam talvez compartilhar daquele único movimento verdadeiro.

E, portanto, em seus sistemas, há aqueles que supõem que nossos céus, girando abaixo da esfera das estrelas fixas, carregam os planetas junto com eles; as diversas partes desses céus, bem como os planetas, os quais estão de fato em repouso relativo nos seus céus, no entanto, realmente se movem, pois mudam suas posições uns com relação aos outros (o que nunca acontece com corpos que estão verdadeiramente em repouso), e sendo carregados junto com os seus céus, compartilham de seus movimentos e, como partes de todos em rotação, tentam afastar-se do eixo de seus movimentos.

Portanto, quantidades relativas não são as próprias quantidades, cujos nomes elas carregam, mas aquelas medidas perceptíveis delas (rigorosas ou não), as quais são comumente usadas em lugar das próprias quantidades medidas. E se o significado das palavras deve ser determinado pelo seu uso, então pelos nomes tempo, espaço, lugar e movimento, deve-se entender suas medidas [perceptíveis]; e a expressão será incomum e puramente matemática, se as próprias quantidades medidas forem consideradas. Por essa razão, violam o rigor da linguagem, que deve ser mantida precisa, aqueles que interpretam estas palavras como as quantidades medidas. Nem corrompem menos a pureza de verdades matemáticas e filosóficas aqueles que confundem quantidades reais com suas relações e medidas perceptíveis.

É realmente uma questão de grande dificuldade descobrir, e efetivamente distinguir, os movimentos verdadeiros de corpos particulares daqueles aparentes; porque as partes daquele espaço imóvel, no qual aqueles movimentos se realizam, de modo algum são passíveis de serem observadas pelos nossos sentidos. No entanto, a situação não é totalmente desesperadora, pois temos alguns argumentos para nos guiar, parte devido aos movimentos aparentes, que são as diferenças dos movimentos verdadeiros, e parte devido às forças, que são as causas e os efeitos dos movimentos verdadeiros. Por exemplo, se dois globos, mantidos a uma dada distância um do outro por meio de uma corda que os ligue, forem girados em torno do seu centro comum de gravidade, poderíamos descobrir, a partir da tensão da corda, o esforço dos globos a se afastarem do eixo de seu movimento, e a partir daí poderíamos calcular a quantidade de seus movimentos circulares. E então, se quaisquer forças iguais fossem imprimidas de uma só vez nas faces alternadas dos globos para aumentar ou diminuir seus movimentos circulares, a partir do acréscimo ou decréscimo da tensão da corda, poderíamos inferir o aumento ou diminuição de seus movimentos; e assim seria encontrado em que face aquelas forças devem ser imprimidas, para que os movimentos dos globos pudessem ser aumentados ao máximo, isto é, poderíamos descobrir suas faces posteriores ou aquelas que, no movimento circular, seguem. Mas

sendo conhecidas as faces que seguem, e conseqüentemente as opostas que precedem, igualmente conheceríamos a determinação dos seus movimentos. E, assim, poder-se-ia encontrar tanto a quantidade como a determinação desse movimento circular, mesmo em um imenso vácuo, onde não existisse nada externo ou sensível com o qual os globos pudessem ser comparados. Porém, se naquele espaço fossem colocados alguns corpos remotos que mantivessem sempre uma dada posição uns com relação aos outros, como as estrelas fixas mantêm nas nossas regiões, não poderíamos, de fato, determinar a partir da translação relativa dos globos entre aqueles corpos, se o movimento pertence aos globos ou aos corpos. Mas, se observássemos a corda, e descobríssemos que sua tensão era aquela mesma tensão que os movimentos dos globos exigiam, poderíamos concluir que o movimento estava nos globos e que os corpos estavam em repouso; então, finalmente, a partir da translação dos globos entre os corpos, devemos obter a determinação dos seus movimentos. Mas as maneiras pelas quais vamos obter os movimentos verdadeiros a partir de suas causas, efeitos e diferenças aparentes, e o contrário, serão explicadas mais amplamente no próximo tratado. Pois foi com este fim que o compus.

» AXIOMAS OU LEIS DO MOVIMENTO[1]

LEI I

Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.

Projéteis continuam em seus movimentos, desde que não sejam retardados pela resistência do ar, ou impelidos para baixo pela força da gravidade. Um pião, cujas partes por sua coesão são continuamente afastadas de movimentos retilíneos, não cessa sua rotação a não ser quando retardado pelo ar. Os corpos maiores dos planetas e cometas, encontrando menos resistência em espaços livres, preservam seus movimentos, tanto progressivo como circular, por um tempo muito maior.

1. Ver nota 14 do Apêndice.

LEI II[2]

A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.

Se qualquer força gera um movimento, uma força dupla vai gerar um movimento duplo, uma força tripla, um movimento triplo, seja aquela força imprimida de uma única vez, ou gradual e sucessivamente. Esse movimento (sendo sempre orientado na mesma direção da força geradora), caso o corpo se mova antes, é adicionado ou subtraído do primeiro movimento, dependendo se eles cooperam na mesma direção ou se são diretamente contrários um ao outro; ou obliquamente combinados, quando oblíquos, de modo a produzir um novo movimento composto a partir da determinação de ambos.

LEI III

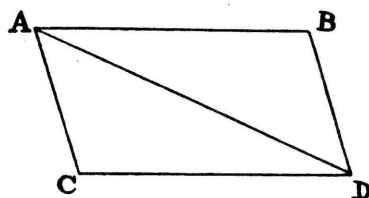
A toda ação há sempre oposta uma reação igual ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.

Seja o que for que puxe ou empurre alguma coisa, é da mesma forma, puxado ou empurrado por ela. Se você empurra uma pedra com seu dedo, o dedo é também empurrado pela pedra. Se um cavalo puxa uma pedra amarrada a uma corda, o cavalo (se posso dizer assim) vai ser igualmente puxado de volta na direção da pedra, pois a corda distendida, pela mesma tendência a relaxar ou distorcer-se, puxará o cavalo, e obstruirá o progresso de um tanto quanto promove o do outro. Se um corpo se choca com outro, e pela sua força muda o movimento desse, aquele corpo também (por causa da igualdade da pressão mútua) sofrerá uma mudança igual no seu próprio movimento, em direção à parte contrária. As mudanças feitas por essa ação são iguais não nas velocidades, mas nos movimentos dos corpos; quer dizer, se os corpos não forem obstruídos por quaisquer outros impedimentos. Pois, porque os movimentos são igualmente alterados, as mudanças de velocidades feitas em direções a partes contrárias são inversamente proporcionais aos corpos. Essa lei também ocorre em atrações, como será provado no próximo Escólio.

2. Ver nota 15 do Apêndice.

COROLÁRIO I

Um corpo, submetido a duas forças simultaneamente, descreverá a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo em que ele descreveria os lados pela ação daquelas forças separadamente.

Se um corpo num dado tempo, pela força M imprimida separadamente no lugar A, fosse levado com um movimento uniforme de A até B, e pela força N imprimida separadamente no mesmo lugar, fosse levado de A para C, completa o paralelogramo ABCD, e por ambas as forças agindo juntas, o corpo seria levado, no mesmo tempo, na diagonal de A para D. Pois, uma vez que a força N age na direção da linha AC, paralela a BD, essa força (pela Segunda Lei) de modo algum altera a velocidade gerada pela outra força M, pela qual o corpo é levado em direção à linha BD. O corpo, portanto, chegará na linha BD no mesmo tempo, seja a força N imprimida ou não e, portanto, ao final daquele tempo será encontrado em algum lugar da linha BD. Pelo mesmo argumento, ao final do mesmo tempo, ele será encontrado em algum lugar da linha CD. Portanto, ele será encontrado no ponto D, onde ambas as linhas se encontram. Mas mover-se-á numa linha reta de A para D, pela Lei I.

COROLÁRIO II

E assim é explicada a composição de qualquer força direta AD, *a partir de quaisquer duas forças oblíquas* AC *e* CD *e, inversamente, a decomposição de qualquer força direta* AD *em duas forças oblíquas* AC *e* CD, *cujas composição e decomposição são abundantemente confirmadas pela mecânica.*

Como, por exemplo, se os raios desiguais OM e ON traçados a partir do centro O de qualquer roda, devessem sustentar os pesos A e P pelas cordas MA e NP e fossem requeridas as forças daqueles pesos para mover a roda. Através do centro O, trace a linha reta KOL, encontrando as cordas perpendicularmente em K e L; e a partir do centro O, sendo OL a maior das distâncias OK e OL, descreva um círculo encontrando a corda MA em D; e traçando OD, faça AC paralela e DC perpendicular a ela. Agora, sendo indi-

ferente se os pontos K, L, D das cordas sejam ou não fixados no plano da roda, os pesos terão o mesmo efeito se forem suspensos a partir dos pontos K e L, ou a partir de D e L. Seja a força total do peso A representada pela linha AD, e seja ela decomposta nas forças AC e CD, das quais a força AC, traçando o raio OD diretamente do centro, não terá efeito algum para mover a roda; mas a outra força DC, traçando o raio DO perpendicularmente a ela, terá o mesmo efeito como se traçasse perpendicularmente o raio OL igual a OD, isto é, ela terá o mesmo efeito que o peso P se

$$P : A = DC : DA,$$

mas como os triângulos ADC e DOK são semelhantes,

$$DC : DA = OK : OD = OK : OL.$$

Portanto,

$$P : A = \text{raio } OK : \text{raio } OL.$$

Como esses raios se situam na mesma linha reta, eles serão equipolentes e, assim, permanecem em equilíbrio; e essa é a bem conhecida propriedade da balança, da alavanca e da roda. Se qualquer um dos pesos for maior do que nessa razão, sua força para mover a roda será igualmente maior.

Se o peso $p = P$ é parcialmente suspenso pela corda N*p*, e parcialmente sustentado pelo plano oblíquo *p*G, trace *p*H, NH, o primeiro perpendicular ao horizonte, e o último ao plano *p*G; e se a força do peso *p* tendendo para baixo é representada pela linha *p*H, ela pode ser decomposta nas forças *p*N, HN. Se existisse um plano qualquer *p*Q, perpendicular à corda *p*N, cortando o outro plano *p*G numa linha paralela ao horizonte, e o peso *p* fosse sustentado somente pelos planos *p*Q e *p*G ele pressionaria esses planos perpendicularmente com as forças *p*N, HN; quer dizer, o plano *p*Q com a força *p*N, e o plano *p*G com a força HN. E, portanto, se o plano *p*Q fosse

removido, de modo que o peso pudesse distender a corda, porque a corda, agora sustentando o peso, tomou o lugar do plano que for removido, ela seria esticada pela mesma força pN que pressionava o plano anteriormente. Portanto,

$$\text{tensão de } pN : \text{tensão de } PN = \text{linha } pN : \text{linha } pH.$$

Portanto, se

$$p : A = OK : OL = \text{linha } pH : \text{linha } pN,$$

então, os pesos p e A terão o mesmo efeito no sentido de mover a roda e, portanto, sustentar-se-ão um ao outro, como pode ser constatado por experimento.

Mas o peso p fazendo pressão sobre aqueles dois planos oblíquos, pode ser considerado como uma cunha entre as duas superfícies internas de um corpo fendido por ela; e assim as forças da cunha e da marreta podem ser determinadas porque a força com a qual o peso p pressiona o plano pQ está para a força com a qual a cunha é impelida na direção da linha pH, para ambos os planos, seja por sua própria gravidade, ou pelo golpe de uma marreta, como

$$pN : pH;$$

e para a força com a qual ela pressiona o outro plano pG, como

$$pN : NH.$$

Também a força do parafuso pode ser deduzida a partir de uma igual decomposição de forças, não sendo outra que uma cunha impelida pela força de uma alavanca. Portanto, a utilidade deste Corolário estende-se amplamente, e por essa abrangência a verdade é assim confirmada ainda mais. Pois do que foi dito depende toda a doutrina da mecânica, de várias maneiras demonstrada por diferentes autores. A partir daí são facilmente deduzidas as forças de máquinas, que são compostas de rodas, polias, alavancas, cordas e pesos, ascendendo direta ou obliquamente, e de outras máquinas mecânicas, bem como a força dos tendões que movem os ossos dos animais.

Corolário III

A quantidade de movimento, que é obtida tomando-se a soma dos movimentos dirigidos para as mesmas partes, e a diferença daqueles que são dirigidos a partes contrárias, não sofre mudança a partir da ação de corpos entre si.

Pois a ação e sua reação oposta são iguais, pela terceira Lei, e portanto, pela segunda Lei, elas produzem nos movimentos mudanças iguais

em direção a partes opostas. Portanto, se os movimentos são dirigidos para as mesmas partes, seja o que for que se acrescente ao movimento do corpo precedente será subtraído do movimento daquele que segue, de modo que a soma será a mesma que antes. Se os corpos se encontram, com movimentos contrários, haverá uma igual dedução a partir dos movimentos de ambos e, portanto, a diferença dos movimentos dirigidos a partes opostas permanecerá a mesma.

Assim, se um corpo esférico A é 3 vezes maior do que o corpo esférico B, e tem uma velocidade = 2, e B segue na mesma direção com uma velocidade = 10, então, movimento de A : movimento de B = 6 : 10.

Suponha, então, que seus movimentos sejam de 6 partes e de 10 partes: a soma será 16 partes. Portanto, no encontro dos corpos, se A adquire 3, 4 ou 5 partes de movimento, tantas igualmente perderá B; e depois da reflexão, A prosseguirá com 9, 10, ou 11 partes, e B com 7, 6 ou 5 partes; a soma permanecendo sempre de 16 partes, como antes. Se o corpo A adquire 9, 10, 11 ou 12 partes de movimento, e, portanto, após o encontro prossegue com 15, 16, 17 ou 18 partes, o coro B, perdendo tantas partes quanto A recebeu, ou prosseguirá com 1 parte, tendo perdido 9, ou parará e permanecerá em repouso, tendo então perdido todo o seu movimento progressivo de 10 partes; ou ele voltará com uma parte, tendo não apenas perdido todo seu movimento, mas (se posso dizer assim), uma parte a mais; ou voltará com duas partes, porque um movimento progressivo de 12 partes for removido. E assim a soma dos movimentos concorrentes

$$15 + 1 \text{ ou } 16 + 0,$$

e as diferenças dos movimentos contrários,

$$17 - 1 \text{ ou } 18 - 2,$$

serão sempre iguais a 16 partes, como elas eram antes do encontro e reflexão dos corpos. Mas sendo conhecidos os movimentos com os quais os corpos prosseguem após a reflexão, a velocidade de qualquer um dos dois será também conhecida, pois a velocidade antes está para a velocidade depois da reflexão, assim como o movimento depois está para o movimento antes. Como no último caso, em que a reflexão (6): movimento de A depois (18) = velocidade de A antes (2): velocidade de A depois (x): isto é,

$$6 : 18 = 2 : x, \ x = 6.$$

Mas se os corpos não são esféricos ou estão se movendo em linhas retas diferentes, e chocam-se obliquamente um com o outro e seus movimentos após a reflexão são requeridos, nesses casos devemos primeiro determinar a posição do plano que toca os corpos no ponto de impacto, e, então, o movimento de cada corpo (pelo Corolário II) deve ser decomposto

em dois: um perpendicular àquele plano e outro paralelo a ele. Feito isso, como os corpos atuam uns sobre os outros na direção de uma linha perpendicular a esse plano, os movimentos paralelos devem ser mantidos os mesmos depois da reflexão; e para os movimentos perpendiculares, devemos atribuir mudanças iguais em direção às partes contrárias; de tal modo que a soma dos movimentos concorrentes e a diferença dos movimentos contrários possa permanecer a mesma que antes. Desses tipos de reflexões surgem às vezes também movimentos circulares dos corpos em torno de seus próprios centros. Mas esses são casos que não considero no que segue, e seria demasiadamente tedioso demonstrar cada caso particular relacionado com esse assunto.

Corolário IV

O centro comum de gravidade de dois ou mais corpos não tem seu estado de movimento ou repouso alterado pelas ações dos corpos entre si e, portanto, o centro comum de gravidade de todos os corpos agindo uns sobre os outros (excluindo ações externas e impedimentos) ou está em repouso, ou se move uniformemente em uma linha reta.

Pois se dois pontos prosseguem com um movimento uniforme em linhas retas, e a distância entre eles for dividida numa dada razão, o ponto divisor estará em repouso ou prosseguirá uniformemente em uma linha reta. Isso é demonstrado mais adiante no Lema XXIII e Corolário, quando os pontos se movem no mesmo plano: e por uma argumentação semelhante, isso pode ser demonstrado quando os pontos não se movem no mesmo plano. Portanto, se um número qualquer de corpos se move uniformemente em linhas retas, o centro de gravidade comum de quaisquer dois deles está em repouso ou prossegue uniformemente em uma linha reta; pois a linha que liga os centros desses corpos assim se movendo é dividida por aquele centro comum numa dada razão. Da mesma maneira, o centro comum daqueles dois e o de um terceiro corpo estará em repouso ou se movendo uniformemente em uma linha reta; pois naquele centro a distância entre o centro comum dos dois corpos e o centro desse último está dividida em uma dada razão. Igualmente, o centro comum desses três e o de um quarto corpo está em repouso ou se move uniformemente em uma linha reta, pois a distância entre o centro comum dos três corpos e o centro do quarto está também dividida em uma dada razão, e assim por diante *in infinitum*. Por-

tanto, em um sistema de corpos onde não há qualquer ação mútua entre eles, nem qualquer força externa imprimida sobre eles, e que conseqüentemente se movem uniformemente em linhas retas, o centro de gravidade comum de todos eles está em repouso, ou se move uniformemente em uma linha reta.

Além disso, em um sistema de dois corpos que atuam um sobre o outro, desde que as distâncias entre seus centros e o centro comum de gravidade de ambos estejam reciprocamente como os corpos, os movimentos relativos daqueles corpos, tanto de aproximação como de afastamento daquele centro, serão iguais entre si. Portanto, uma vez que as mudanças que acontecem aos movimentos são iguais e dirigidas para partes contrárias, o centro daqueles corpos, pela ação mútua entre eles, não é acelerado nem retardado, nem sofre qualquer mudança com relação a seu estado de movimento ou repouso. Mas em um sistema de vários corpos, como o centro de gravidade comum de quaisquer dois corpos atuando um sobre o outro não sofre mudança em seu estado por aquela ação; e muito menos o centro de gravidade comum dos outros com os quais aquela ação não intervém; mas a distância entre aqueles dois centros é dividida pelo centro de gravidade comum de todos os corpos em partes inversamente proporcionais às somas totais daqueles corpos dos quais eles são centros; e assim, enquanto aqueles dois centros retêm seus estados de movimentos ou repouso, o centro comum de todos também mantém seu estado: é evidente que o centro comum de todos jamais sofre qualquer mudança no seu estado de movimento ou repouso pelas ações de quaisquer dois corpos entre si. Mas em tal sistema todas as ações dos corpos entre si ou ocorrem entre dois corpos, ou são compostas de ações trocadas entre quaisquer dois corpos; e, portanto, elas jamais produzem qualquer alteração no centro comum de todos com relação a seu estado de movimento ou repouso. Por essa razão, uma vez que aquele centro, quando os corpos não atuam uns sobre os outros, ou está em repouso, ou se move uniformemente para frente em alguma linha reta, ele sempre continuará em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, independentemente das ações mútuas dos corpos entre si, a menos que seja forçado a sair desse estado pela ação de alguma força *imprimida* de fora sobre o sistema todo. E, portanto, a mesma lei se aplica para um sistema que consiste de muitos corpos, bem como para um único corpo, no que diz respeito à perseverança em seus estados de movimento ou de repouso. Pois o movimento progressivo, seja de um único corpo ou de todo um sistema de corpos, deve ser sempre estimado a partir do movimento do centro de gravidade.

COROLÁRIO V

O movimento de corpos encerrados em um dado espaço são os mesmos entre si, esteja esse espaço em repouso, ou se movendo uniformemente em uma linha reta sem qualquer movimento circular.

Pois a diferença dos movimentos que tendem para as mesmas partes e as somas daqueles que tendem para as partes contrárias, são, em ambos os casos, em princípio (por suposição), as mesmas; e é daquelas somas e diferenças que se originam as colisões e impulsos que os corpos impingem uns aos outros. Por essa razão (pela Lei II), os efeitos daquelas colisões serão iguais em ambos os casos; e, portanto, os movimentos mútuos dos corpos entre si, em um caso, permanecerão iguais aos movimentos dos corpos entre si no outro. E sobre isso há uma prova clara. Em um navio, todos os movimentos acontecem da mesma maneira, esteja o navio em repouso, ou sendo conduzido uniformemente em uma linha reta.

COROLÁRIO VI

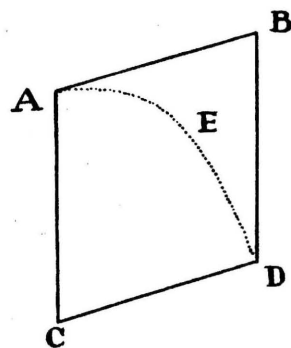
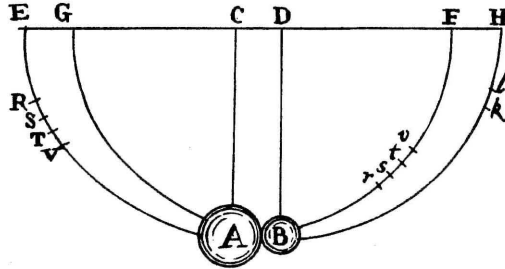
Se corpos movidos de qualquer maneira entre si são impelidos na direção de linhas paralelas por forças acelerativas iguais, eles continuarão todos a mover-se entre si da mesma maneira, como se não tivessem sido impelidos por aquelas forças.

Pois essas forças agindo igualmente (com respeito às quantidades dos corpos a serem movidos), e na direção de linhas paralelas, moverão (pela Lei II) todos os corpos igualmente (no que diz respeito à velocidade), e assim, nunca produzirão qualquer mudança nas posições ou movimentos dos corpos entre si.

Escólio[3]

Até aqui, estabeleci tais princípios do modo como foram aceitos pelos matemáticos, e, como confirmados por uma abundância de experimentos. Pelas primeiras duas Leis e pelos primeiros dois Corolários, Galileu des-

3. Ver nota 16 do Apêndice.

cobriu que a queda dos corpos variava como o quadrado do tempo (*in duplicata ratione temporis*) e que o movimento dos projéteis estava na curva de uma parábola; a experiência concorda com ambos, a não ser pelo fato de que esses movimentos são um pouco retardados pela resistência do ar. Quando um corpo está caindo, a força uniforme de sua gravidade, agindo igualmente, imprime em intervalos de tempo iguais, forças iguais sobre aquele corpo e, portanto, gera velocidades iguais; e no tempo total, imprime uma força total e gera uma velocidade total proporcional ao tempo. E os espaços descritos em tempos proporcionais são como o produto das velocidades e dos tempos; isto é, como os quadrados dos tempos. E quando um corpo é atirado para cima, sua gravidade uniforme imprime forças e reduz velocidades proporcionalmente aos tempos; e os tempos de subida às alturas máximas são como as velocidades a serem extinguidas, e aquelas alturas são como o produto das velocidades e dos tempos, ou como os quadrados das velocidades. E se um corpo for arremessado em qualquer direção, o movimento originado por seu lançamento é composto com o movimento originado por sua gravidade. Assim, se o corpo A, apenas por seu movimento de arremesso, pudesse descrever num dado tempo a linha reta AB, e apenas com seu movimento de queda pudesse descrever no mesmo tempo a altitude AC; completa o paralelogramo ABCD e o corpo, por aquele movimento composto, será encontrado no final do tempo no lugar D; e a linha curva AED que o corpo descreve será um parábola, para a qual a linha reta AB será uma tangente em A; e cuja ordenada BD será como o quadrado da linha AB. Das mesmas Leis e Corolários dependem aqueles fatos que foram demonstrados com relação aos tempos de vibração de pêndulos, e que são confirmados em experimentos cotidianos com relógios de pêndulo. Pelas mesmas, juntamente com a Lei III, Sir *Christopher Wren,* Dr. *Wallis e* Mr. *Huygens,* os maiores geômetras de nossos tempos, determinaram separadamente as regras do impacto e reflexão de corpos duros, e aproximadamente na mesma época comunicaram suas descobertas à *Royal Society,* concordando totalmente entre si com relação àquelas regras. Dr. *Wallis,* de fato, publicou seu trabalho um pouco antes, seguido por Sir *Christopher Wren,* e finalmente, por Mr. *Huygens.* Mas Sir *Christopher Wren* confirmou primeiro a verdade dos fatos perante a *Royal Society* através de experimentos com pêndulos, que M. *Mariotte* logo depois julgou apropriado explicar em um tratado inteiramente

dedicado a esse assunto[4]. Mas para fazer esse experimento concordar plenamente com a teoria, precisamos dar a devida consideração tanto à resistência do ar quanto à força elástica dos corpos concorrentes.

Sejam A e B os corpos esféricos, suspensos pelos fios iguais e paralelos AC, BD, a partir dos centros C, D. Em torno desses centros, com aqueles comprimentos como raios, descreva os semicírculos EAF, GBH, bisseccionados respectivamente pelos raios CA, DB. Leve o corpo A para qualquer ponto R do arco EAF e (retirando o corpo B) abandone-o a partir daí e, após uma oscilação, suponha que ele retornou ao ponto V; então, RV será o retardo causado pela resistência do ar. Seja ST uma quarta parte de RV, situada no meio, ou seja, de modo que

$$RS = TV,$$

$$\text{e } RS : ST = 3 : 2,$$

então, ST representará muito aproximadamente o retardo durante a descida de S até A. Recoloque o corpo B no seu lugar; e supondo que se deixe cair o corpo A do ponto S, sua velocidade no lugar de reflexão A, sem erro perceptível, será a mesma que ele teria se tivesse descido *in vacuo*, a partir do ponto T. Por essa razão, tal velocidade pode ser representada pela corda do arco TA. Pois é uma proposição bem conhecida dos geômetras que a velocidade de um corpo pendular no seu ponto mais baixo é como a corda do arco que ele descreveu na sua descida. Após a reflexão, suponha que o corpo A venha para o lugar *s*, e o corpo B para o lugar *k*. Retire o corpo B e encontre o lugar *v*, a partir do qual o corpo A, sendo largado, retornaria a *r* após uma oscilação; *st* pode ser uma quarta parte de *rv*, de tal forma colocado no meio daquele, de modo que *rs* seja igual a *tv*; e faça com que a corda do arco *t*A represente a velocidade que o corpo A tinha no lugar A imediatamente após a reflexão. Pois *t* será o lugar verdadeiro e correto para o qual o corpo A deveria subir, se a resistência do ar pudesse ser quebrada. Do mesmo modo, temos o lugar correto *k* para o qual o corpo B sobe, encontrando

4. Ver nota 17 do Apêndice.

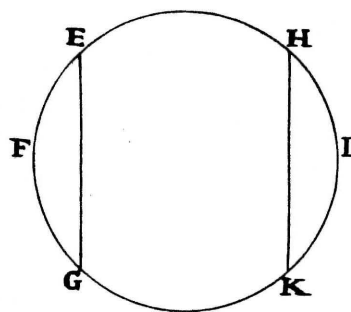
o lugar *l* para o qual ele deveria ter subido *in vacuo*. E assim, tudo pode ser submetido à experiência, da mesma maneira como se estivéssemos realmente *in vacuo*. Feito isso, devemos tomar o produto (se posso dizer assim) do corpo A pela corda do arco TA (que representa sua velocidade), com o que obtemos seu movimento no lugar A imediatamente antes da reflexão e então, pela corda do arco *t*A, com o que obtemos seu movimento no lugar A imediatamente após a reflexão. Igualmente devemos tomar o produto do corpo B pela corda do arco B*l*, com o que obtemos o seu movimento imediatamente após a reflexão. E da mesma maneira, quando dois corpos são largados simultaneamente de lugares diferentes, devemos encontrar o movimento de cada um tanto antes como depois da reflexão; e, então, podemos comparar os movimentos entre si e colher os efeitos da reflexão. Assim, experimentando com pêndulos de 10 pés, tanto com corpos iguais como desiguais, e fazendo os corpos concorrerem após uma descida através de grandes espaços, como de 8, 12 ou 16 pés, sempre encontrei, com erro inferior a 3 polegadas, que quando os corpos concorriam diretamente, mudanças iguais em direção às partes contrárias eram produzidas em seus movimentos, e, conseqüentemente, que ação e reação eram sempre iguais. Como se o corpo A, chocando-se com 9 partes de movimento com o corpo B em repouso, e perdendo 7, após a reflexão prosseguisse com 2, e o corpo B recuasse com aquelas 7 partes. Se os corpos concorressem com movimentos contrários, A com 12 partes de movimentos e B com 6, então se A retrocedesse com 2, B retrocederia com 8, isto é, com uma redução de 14 partes de movimento de cada lado. Pois, subtraindo 12 partes do movimento de A, nada restará; mas subtraindo 2 partes mais, um movimento de 2 partes será gerado na direção contrária; e assim, subtraindo 14 partes do movimento do corpo B, que era de 6 partes, é gerado um movimento de 8 partes na direção contrária. Mas se ambos os corpos fossem movidos na mesma direção, A, o mais rápido, com 14 partes de movimento e B, o mais lento, com 5, e após a reflexão, A continuasse com 5, B, da mesma forma, prosseguiria com 14 partes, sendo 9 partes transferidas de A para B. E assim em outros casos. Pelo encontro e colisão de corpos, a quantidade de movimento, obtida da soma dos movimentos que tinham a mesma direção, ou da diferença daqueles que tinham direções contrárias, nunca mudou. O erro de uma ou duas polegadas nas medidas pode ser facilmente atribuído à dificuldade de executar as experiências com exatidão. Não foi fácil soltar os dois pêndulos simultaneamente para que os corpos se chocassem exatamente no lugar mais baixo AB; nem marcar os lugares *s* e *k*, para os quais os corpos subiram após o impacto. Também alguns erros podem ter ocorrido em função da desigualdade de

densidades das partes dos próprios pêndulos, e da irregularidade da textura, advinda de outras causas.

Mas para evitar uma objeção que talvez possa ser levantada contra a regra (para a prova da qual esse experimento foi feito), como se ela supusesse que os corpos fossem absolutamente duros, ou pelo menos perfeitamente elásticos (apesar de tais corpos não serem encontrados na natureza), preciso acrescentar que as experiências que vimos descrevendo, de modo algum dependendo daquela qualidade de dureza, são realmente bem sucedidas tanto em corpos macios como em corpos duros. Pois se a regra deve ser testada em corpos não totalmente duros, temos apenas de diminuir a reflexão na proporção que exige a quantidade de força elástica. Pela teoria de *Wren* e *Huygens*, corpos absolutamente duros retornam logo após o choque com a mesma velocidade com que se encontram. Mas isso pode ser afirmado com mais certeza no caso de corpos perfeitamente elásticos. Em corpos imperfeitamente elásticos a velocidade de retorno deve diminuir juntamente com a força elástica; pois aquela força (exceto quando as partes dos corpos são deformadas pelo impacto, ou sofrem uma ampliação, tal como acontece sob as batidas de um martelo) é (tanto quanto pude perceber) certa e determinada, e faz os corpos retornarem imediatamente após o choque com uma velocidade relativa, que está em uma dada razão para aquela velocidade relativa com a qual eles se encontraram. Experimentei isso com bolas de lã, bem amarradas e fortemente comprimidas. Pois, inicialmente, soltando os pêndulos e medindo sua reflexão, determinei a quantidade de sua força elástica; e, então, de acordo com essa força, estimei as reflexões que devem ocorrer em outros casos de impacto. E outras experiências feitas posteriormente de fato concordaram com esse cálculo; as bolas sempre se afastando uma da outra com uma velocidade relativa, que estava para a velocidade com a qual se encontraram, de aproximadamente 5 para 9. Bolas de aço retornam com quase a mesma velocidade; as de cortiça, com uma velocidade um pouco menor; mas em bolas de vidro a proporção foi de 15 para 16. E assim, a terceira Lei, na medida em que se refere a percussões e reflexões, está provada por uma teoria que concorda exatamente com a experiência.

Em atrações, demonstro isso brevemente de acordo com o que segue. Suponha que um obstáculo é colocado de modo a evitar o encontro de quaisquer dois corpos A, B, que se atraem. Então, se qualquer corpo, tal como A, é mais atraído na direção do outro corpo B, do que o outro corpo B o é na direção do primeiro corpo A, o obstáculo será mais fortemente empurrado pela pressão do corpo A do que pela pressão do corpo B e, portanto, não permanecerá em equilíbrio; mas a pressão mais intensa prevale-

cerá e fará o sistema dos dois corpos, juntamente com o obstáculo, mover-se diretamente para onde B se encontra; e em espaços livres, os fará ir para a frente *in infinitum* com um movimento continuamente acelerado, o que é absurdo e contrário à primeira Lei. Pois, pela primeira Lei, o sistema deve continuar em seu estado de repouso, ou movimento uniforme em linha reta; e assim conclui-se que os corpos devem pressionar igualmente o obstáculo, e ser igualmente atraídos um pelo outro. Fiz a experiência com magnetita e ferro. Se esses, colocados separadamente em recipientes adequados, flutuam um próximo ao outro, em água parada, nenhum deles propelirá o outro; mas, por serem igualmente atraídos, suportarão a pressão um do outro, e finalmente repousarão em equilíbrio.

Assim, a gravitação entre a Terra e as suas partes é mútua. Seja a Terra FI cortada por qualquer plano EG em duas partes EGF e EGI, e seus pesos, um em direção ao outro, serão mutuamente iguais. Pois se por outro plano HK, paralelo a EG, a maior parte EGI é cortada em duas partes EGKH e HKI. Sendo esta última igual à parte EFG anteriormente separada, é evidente que a parte central EGKH não apresentará tendência alguma, por seu próprio peso, em direção a qualquer lado, mas ficará como estava, e repousará em equilíbrio entre ambos. Mas a parte extrema HKI se apoiará e pressionará com todo o seu peso a parte central em direção à outra parte extrema EGF; e, portanto, a força com a qual EGI, a soma das partes HKI e EGKH, tende em direção à terceira parte EGF é igual ao peso da parte HKI, isto é, ao peso da terceira parte EGF. E, assim, os pesos das duas partes EGI e EGF, uma em direção à outra, são iguais, como eu queria provar. E, de fato, se aqueles pesos fossem iguais, a Terra inteira flutuando no éter não-resistente ao peso maior, e afastando-se dele, seria levada *in infinitum.*

E como aqueles corpos são equipolentes no impacto e na reflexão, cujas velocidades são inversamente como suas forças inatas, também no uso de instrumentos mecânicos aqueles agentes são equipolentes, e cada um suporta mutuamente a pressão contrária do outro, cujas velocidades, estimadas de acordo com a determinação das forças, são inversamente como as forças.

Assim, são de igual força para mover os braços de uma balança os pesos que, durante o movimento da balança, estão inversamente como suas velocidades para cima e para baixo, isto é, se a subida ou descida é retilínea,

aqueles pesos são de mesma força, a qual é inversamente como as distâncias entre os pontos em que estão suspensos e o eixo da balança; mas se eles são deslocados pela interposição de planos oblíquos, ou outros obstáculos, de modo a subir ou descer obliquamente, aqueles corpos serão equipolentes, os quais são inversamente como as alturas de suas subida e descida tomadas na direção perpendicular; e isso devido à tendência da gravidade para baixo.

E da mesma maneira, em uma polia ou combinação de polias, a força da mão puxando a corda diretamente sustentará o peso, força essa que está para o peso, seja subindo direta ou obliquamente, como a velocidade da subida perpendicular do peso está para a velocidade da mão que puxa a corda.

Em relógios e instrumentos semelhantes, construídos por uma combinação de rodas, as forças contrárias que promovem ou impedem o movimento das rodas sustentar-se-ão mutuamente, caso sejam inversamente como as velocidades das partes da roda sobre as quais são imprimidas.

A força com que um parafuso pressiona um corpo está para a força da mão que gira o cabo pelo qual ele é movido, assim como a velocidade circular do cabo naquela parte em que ele é impelido pela mão está para a velocidade progressiva do parafuso em direção ao corpo pressionado.

As forças pelas quais a cunha empurra ou força as duas partes da madeira que ela racha, estão para a força da marreta sobre a cunha assim como o avanço da cunha na direção da força imprimida sobre ela, pela marreta, está para a velocidade com que as partes da madeira cedem à cunha, na direção de linhas perpendiculares aos lados da cunha. E tal explicação deve valer para todas as máquinas.

O poder e a utilidade das máquinas consiste apenas em que, diminuindo-se a velocidade podemos aumentar a força, e vice-versa; a partir disso, podemos dizer que, para todos os tipos de máquinas temos a solução do seguinte problema: *Mover um dado peso com uma dada potência*, ou superar qualquer resistência com uma dada força. Pois se as máquinas são concebidas de tal forma que as velocidades do agente e do resistente estão inversamente para suas forças, o agente apenas reterá o resistente; mas com uma maior disparidade de velocidades, o superará. De modo que, se a disparidade de velocidades é tão grande, a ponto de superar toda aquela resistência que normalmente se origina da fricção de corpos contíguos ou da coesão de corpos contínuos que devem ser separados, ou dos pesos de corpos a serem levantados, o excesso da força remanescente, após todas essas resistências terem sido superadas, produzirá uma proporcional aceleração do movimento, tanto nas partes da máquina como no corpo resistente. Mas não é meu interesse, no momento, tratar de mecânica. Eu pretendia simplesmente

mostrar com esses exemplos a grande extensão e rigor da terceira Lei do Movimento. Pois se estimamos a ação do agente a partir do produto de sua força e velocidade, e da mesma forma, a reação do impedimento a partir do produto das velocidades de suas várias partes e as forças de resistências oriundas da fricção, coesão, peso ou aceleração dessas partes, a ação e a reação, usando-se todos os tipos de máquinas, serão sempre iguais. E na medida em que a ação é propagada pelos instrumentos intervenientes e, finalmente, imprimida sobre o corpo resistente, a ação última será sempre contrária à reação.

» LIVRO I

O MOVIMENTO DOS CORPOS

» SEÇÃO I

O método da primeira e última razões de quantidades,
com o auxílio do qual demonstramos as proposições abaixo

LEMA I

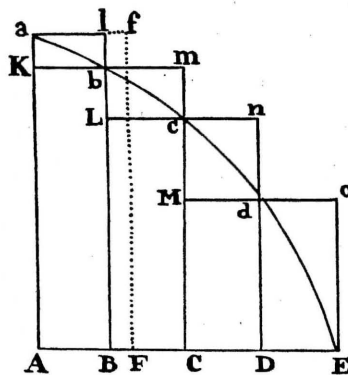
As quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do fim daquele tempo, aproximam-se mais uma da outra do que por qualquer diferença dada, tornam-se finalmente iguais.

Se você negá-lo, suponha-as como finalmente desiguais, e tome D como sendo a última diferença. Portanto, elas não podem se aproximar mais da igualdade do que por essa diferença dada D; o que contraria a suposição.

PROPOSIÇÃO XXVIII. TEOREMA XVII

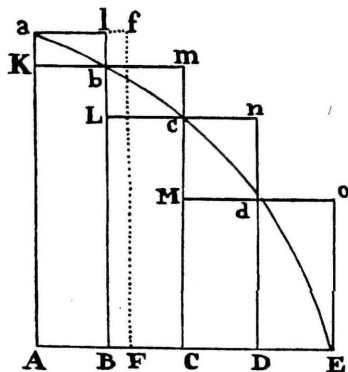
Se em qualquer figura AacE, *delimitada pelas retas* Aa, AE *e a curva* acE, *existirem um número qualquer de paralelogramos* Ab, Bc, Cd *etc., de bases iguais* AB, BC, CD *etc., e lados* Bd, Cc, Dd *etc., paralelos a um lado* Aa *da figura; e os paralelogramos* aKbl, bLcm, cMdn *etc., forem completados; então se for suposto que a largura daqueles paralelogramos foi progressiva-*

mente diminuída e o seu número aumentado in infinitum, *afirmo que as razões finais que a figura inscrita* AKbLcMdD, *a figura circunscrita* AalbmcndoE *e a figura curvilínea* AabcdE, *terão uma para a outra, são razões de igualdades.*

Pois a diferença das figuras inscrita e circunscrita é a soma dos paralelogramos K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, isto é (a partir da igualdade de todas as suas bases), o retângulo sob uma de suas bases K*b* e a soma de suas alturas A*a*, ou seja, o retângulo AB*la*. Mas este retângulo, pela hipótese de que sua largura AB seja diminuída *in infinitum*, torna-se menor que qualquer espaço dado. E, portanto (pelo Lema I), as figuras inscrita e circunscrita tornam-se, ao final, iguais uma à outra; e ainda mais, a figura curvilínea intermediária será finalmente igual a qualquer uma delas. Q.E.D.

Lema III

As mesmas razões finais serão também razões de igualdade quando as larguras AB, BC, CD *etc., dos paralelogramos são desiguais, e forem todas diminuídas* in infinitum.

Pois suponha AF igual à maior largura, e complete o paralelogramo FA*af*. Esse paralelogramo será maior do que a diferença das figuras inscrita e circunscrita; mas, porque sua largura AF é diminuída *in infinitum*, ele se tornará menor do que qualquer retângulo dado. Q.E.D.

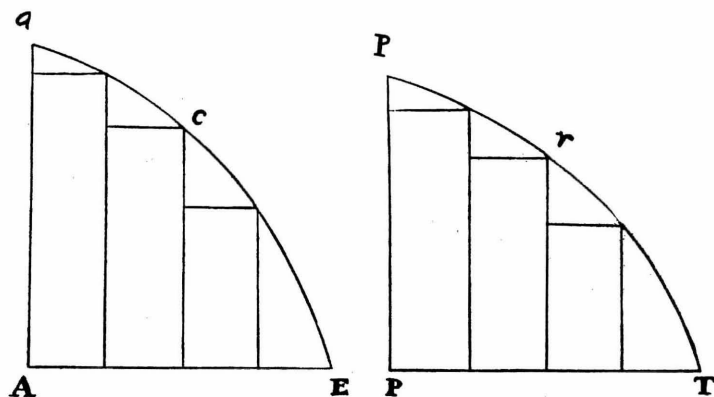
Corolário I – Assim, a soma final daqueles paralelogramos evanescentes* coincidirá em todas as partes com a figura curvilínea.

* Por "quantidades evanescentes" deve-se entender quantidades tão pequenas quanto se queira, isto é, infinitesimais (N.T.).

COROLÁRIO II – A figura retilínea limitada pelas cordas dos arcos evanescentes *ab, bc, cd* etc., coincidirá finalmente, ainda mais, com a figura curvilínea.

COROLÁRIO III – E da mesma forma, a figura retilínea circunscrita, limitada pelas tangentes dos mesmo arcos.

COROLÁRIO IV – E, portanto, essas figuras finais (com relação a seus perímetros *ac*E) não são retilíneas, mas limites curvilíneos de figuras retilíneas.

LEMA IV

Se em duas figuras AacE, PprT, *são inscritas (como antes) duas séries de mesmo número de paralelogramos, e suas larguras são diminuídas* in infinutum, *se as razões finais dos paralelogramos numa figura para aqueles na outra, um a um respectivamente, são as mesmas; afirmo que aquelas duas figuras,* AacE *e* PprT, *estarão uma para a outra naquela mesma razão.*

Pois assim como os paralelogramos em uma das figuras estão respectivamente para os paralelogramos da outra, da mesma forma (por composição) está a soma de todos numa das figuras para a soma de todos na outra; e assim, uma figura está para a outra; porque (pelo Lema III) a primeira figura está para a primeira soma, e a última para a última soma, na razão de igualdade. Q.E.D.

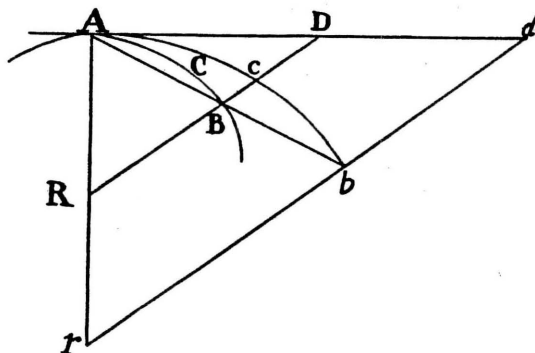
COROLÁRIO – Assim, se duas quantidades de qualquer tipo são divididas de qualquer maneira em um número igual de partes, e aquelas partes, quando seu número é aumentado e suas grandezas diminuídas *in infinitum,* tem uma dada razão uma para a outra, a primeira para a primeira, a segunda

para a segunda, e assim por diante, todas elas tomadas em conjunto estarão uma para a outra na mesma razão dada. Porque se, nas figuras desse Lema, os paralelogramos forem tomados um para o outro na razão das partes, a soma das partes será sempre como a soma dos paralelogramos; e, portanto, supondo que o número de paralelogramos e suas partes seja aumentado, e suas grandezas diminuídas *in infinitum*, aquelas somas estarão na razão final do paralelogramo em uma das figuras para o correspondente paralelogramo na outra; isto é (pela suposição), na razão final de qualquer parte de uma quantidade para a parte correspondente da outra.

Lema V

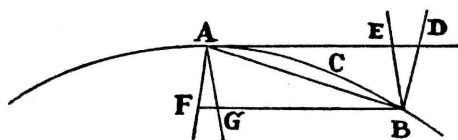
Todos os lados homólogos de figuras semelhantes, quer curvilíneas ou retilíneas, são proporcionais; e as áreas são os quadrados dos lados homólogos.

Lema VI

Se o arco ACB, *em qualquer posição, é subtendido pela sua corda* AB, *e em qualquer ponto* A, *no meio da curvatura contínua é tocado por uma linha reta* AD, *estendida para ambos os lados; então se os pontos* A *e* B *aproximam-se um do outro para se encontrarem, afirmo que o ângulo* BAD, *formado entre a corda e a tangente, diminuirá* in infinitum, *e finalmente se anulará.*

Pois se esse ângulo não desaparecer, o arco ACB formará com a tangente AD um ângulo igual a um ângulo reto; e, portanto, a curvatura no ponto A não será contínua, o que contraria a suposição.

LEMA VII

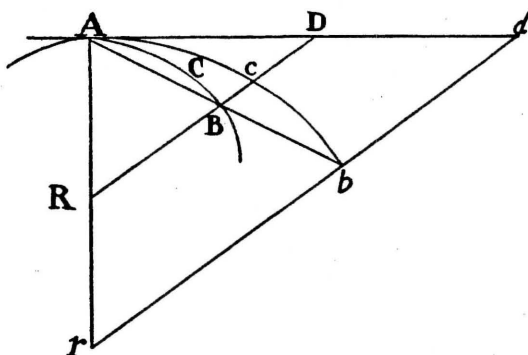
O mesmo sendo suposto, afirmo que a razão final do arco, da corda e da tangente, um com relação ao outro, é a razão de igualdade.

Pois à medida em que o ponto B se aproxima do ponto A, considere sempre AB e AD como estendidos na direção dos pontos remotos *b* e *d*; e paralelamente à secante BD, trace *bd*; e seja o arco A*cb* sempre semelhante ao arco ACB. Então, supondo que os pontos A e B coincidam, o ângulo *d*A*b* se anulará, conforme o Lema precedente; e, portanto, as linhas retas A*b*, A*d* (que são sempre finitas), e o arco intermediário A*cb*, coincidirão e tornar-se-ão iguais entre si. Por conseguinte, as linhas retas AB, AD, e o arco intermediário ACB (que é sempre proporcional à primeira), se anularão alcançando finalmente a razão de igualdade. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se através de B traçarmos BF paralelamente à tangente, sempre cortando qualquer linha reta AF, passando por A, em F, esta linha BF estará, ao final, em razão de igualdade com o arco evanescente ACB; porque, completando o paralelogramo AFBD, ela estará sempre em razão de igualdade com AD.

COROLÁRIO II – E se por B e A forem traçadas mais linhas retas, como BE, BD, AF, AG, cortando a tangente AD e sua paralela BF, a razão final de todas as abcissas AD, AE, BF, BG, e da corda e do arco AB, entre qualquer um deles, será a razão de igualdade.

COROLÁRIO III – E, portanto, em todo nosso raciocínio sobre razões finais, podemos livremente usar qualquer uma dessas linhas no lugar de qualquer outra.

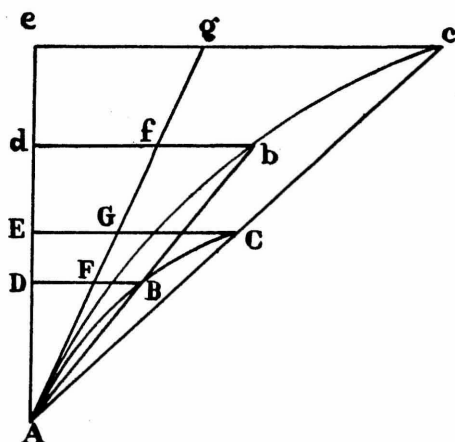
LEMA VIII

Se as linhas retas AR, BR, *com o arco* ACB, *a corda* AB *e a tangente* AD, *constituem três triângulos* RAB, RACB, RAD, *e se os pontos* A *e* B *se aproximam e se encontram, afirmo que a forma final desses triângulos evanescentes é a de semelhança, e sua razão final, a de igualdade.*

Pois, enquanto o ponto B se aproxima de A, considere sempre AB, AD, AR, como, estendidos na direção dos pontos remotos *b*, *d* e *r*, e *rbd* seja traçado paralelamente a RD, e tome o arco A*cb* sempre semelhante ao arco ACB. Então, supondo que os pontos A e B coindidam, o ângulo *b*A*d* se anulará; e, portanto, os três triângulos *r*A*b*, *r*A*cb*, *r*A*d* (que são sempre finitos), coincidirão, tornando-se tanto semelhantes quanto iguais. E, portanto, os triângulos RAB, RACB, RAD, que são sempre semelhantes e proporcionais àqueles, tornar-se-ão no final tanto semelhantes quanto iguais entre si. Q.E.D.

COROLÁRIO – E, então, em todo raciocínio sobre razões finais, podemos usar qualquer um daqueles triângulos no lugar de qualquer outro.

LEMA IX

Se uma linha reta AE *e uma linha curva* ABC, *ambas dadas em posição, cortarem-se uma à outra em um ângulo dado,* A*; e com relação a essa linha reta, em outro ângulo,* BD, CE *forem traçadas de modo a encontrar a curva em* B, C*; e os pontos* B *e* C *juntos se aproximam e se encontram no ponto* A. *Posso confirmar que as áreas dos triângulos* ABD, ACE, *estarão finalmente uma para a outra como os quadrados de lados homólogos.*

Pois enquanto os pontos B, C, aproximam-se na direção do ponto A, suponha que AD seja estendida até os pontos remotos *d* e *e*, tal que A*d*, A*e* sejam proporcionais a AD, AE; suponha também que as ordenadas *db*, *ec* sejam traçadas paralelamente às ordenadas DB e EC, encontrando AB e AC estendidas, em *b* e *c*. Faça a curva A*bc* semelhante à curva ABC, e trace a linha reta A*g* tal que toque ambas as curvas em A, e corte as ordenadas DB, EC, *db*, *ec* em F, G, *f*, *g*. Então, supondo que o comprimento A*e* permaneça o mesmo, faça os pontos B e C encontrarem-se no ponto A; e anulando-se o

ângulo *c*A*g*, as áreas curvilíneas A*bd*, A*ce* coincidirão com as áreas retilíneas A*fd*, A*ge*, e, portanto (pelo Lema V), estarão uma para a outra na razão quadrada dos lados A*d*, A*e*. Mas as áreas ABD, ACE são sempre proporcionais àquelas áreas; e, da mesma forma, os lados AD, AE estarão para esses lados. E, assim, as áreas ABD, ACE estão finalmente uma para a outra como os quadrados dos lados AD, AE. Q.E.D.

LEMA X

As distâncias que um corpo descreve impelido por qualquer força finita, seja essa força determinada e imutável, ou continuamente aumentada ou diminuída, estão, exatamente no início do movimento, uma para a outra, como os quadrados dos tempos.

Sejam os tempos representados pelas linhas AD, AE, e as velocidades geradas naqueles tempos pelas ordenadas DB, EC. As distâncias descritas com essas velocidades serão como as áreas ABD, ACE, descritas por aquelas ordenadas, isto é, exatamento no início do movimento (pelo Lema IX), na razão quadrada dos tempos AD, AE. Q.E.D.

COROLÁRIO I – E, assim, pode-se facilmente inferir que os desvios de corpos que descrevem partes semelhantes de figuras semelhantes em tempos proporcionais – sendo os desvios gerados por quaisquer forças iguais aplicadas de maneira semelhantes aos corpos, e medidos pelas distâncias dos corpos a partir daqueles lugares das figuras semelhantes, nos quais, se não fosse a *ação* daquelas forças, os corpos teriam chegado naqueles tempos proporcionais – são aproximadamente como os quadrados dos tempos nos quais foram gerados.

COROLÁRIO II – Mas os desvios gerados por forças proporcionais, aplicadas de maneira semelhantes aos corpos em partes semelhantes de figuras semelhantes, são como o produto das forças e dos quadrados dos tempos.

COROLÁRIO III – O mesmo deve ser entendido de quaisquer distâncias, descritas por corpos impelidos por diferentes forças; todas elas, exatamente no início do movimento, são como o produto das forças e dos quadrados dos tempos.

COROLÁRIO IV – E, portanto, as forças são diretamente como os espaços descritos exatamente no início do movimento, e inversamente como os quadrados dos tempos.

COROLÁRIO V – E os quadrados dos tempos são diretamente como os espaços descritos, e inversamente como as forças.

Escólio

E se na comparação de quantidades indeterminadas de tipos diferentes, qualquer uma for tomada como direta ou inversamente proporcional a outra qualquer, isto significa que a primeira é aumentada ou diminuída na mesma razão que a última, ou como a sua recíproca. E se qualquer uma for considerada como estando para quaisquer duas ou mais, direta ou inversamente, isto significa que a primeira é aumentada ou diminuída na razão composta das razões em que as outras, ou suas recíprocas, são aumentadas ou diminuídas. Assim, se A for considerada como estando diretamente para B e C, e inversamente para D, isto significa que A é aumentada ou diminuída na mesma razão que B.C.1/D, ou seja, que A e BC/D estão uma para a outra em uma certa razão.

LEMA XI[1]

A subtensa evanescente do ângulo de contato, em todas as curvas que possuem curvatura finita no ponto de contato, é como o quadrado da subtensa do arco vizinho.*

1. Ver nota 17 do Apêndice.
* Corda de um arco.

CASO 1 – Seja AB esse arco, AD sua tangente, BD a subtensa do ângulo de contato perpendicular à tangente, AB a subtensa do arco. Trace BG perpendicularmente à subtensa AB, e AG perpendicularmente à tangente AD, encontrando-se em G; então, faça os pontos D, B e G aproximarem-se dos pontos *d*, *b* e *g*, e suponha que J seja a intersecção final das linhas BG, AG, quando os pontos D, B alcançam A. É evidente que a distância GJ pode ser menor que qualquer distância arbitrável. Mas (a partir da natureza dos círculos que passam pelos pontos A, B, G e pelos pontos A, *b*, *g*),

$$AB^2 = AG.BD, \text{ e}$$
$$Ab^2 = Ag.bd.$$

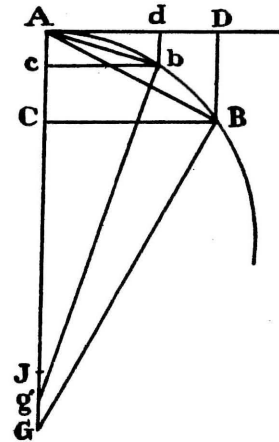
Mas, como GJ pode ser considerado de comprimento menor do que qualquer outro arbitrável, a razão de AG para A*g* pode ser tal que a sua diferença da unidade seja menor do que qualquer diferença arbitrável; e, portanto, a razão de AB^2 para Ab^2 pode ser tal que a sua diferença em relação à razão de BD para *bd* seja menor do que qualquer diferença arbitrável. Portanto, pelo Lema I, finalmente,

$$AB^2 : Ab^2 = BD : bd. \qquad \text{Q.E.D.}$$

CASO 2 – Agora seja BD inclinada em relação a AD com qualquer ângulo, e a razão final de BD para *bd* será sempre a mesma que antes, e, portanto, o mesmo acontece com a razão de AB^2 para Ab^2. Q.E.D

CASO 3 – E considerando-se que o ângulo D não seja dado, mas que a linha reta BD converge para um ponto dado, ou é determinada por qualquer outra condição; apesar disso, os ângulos D, *d*, sendo determinados pela mesma lei, tenderão sempre mais à igualdade, e a aproximar-se mais um do outro, do que por qualquer diferença arbitrada, e, portanto, pelo Lema I, serão, no final, iguais; e, assim, as linhas BD, *bd* estão na mesma razão, uma para a outra, como antes. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, uma vez que as tangentes AD, A*d*, os arcos AB, A*b*, e seus senos BC, *bc* tornam-se iguais às cordas AB, A*b*, seus quadrados finalmente tornar-se-ão como as subtensas BD, *bd*.

COROLÁRIO II – Seus quadrados também são, finalmente, como os senos versos* dos arcos, bisseccionando as cordas e convergindo para dado um ponto. Pois aqueles senos versos são como as subtensas BD, *bd*.

* A diferença entre a unidade e a função co-seno.

COROLÁRIO III – E, portanto, o seno verso é como o quadrado do tempo em que um corpo descreverá o arco com uma dada velocidade.

COROLÁRIO IV – A proporção final

$$\Delta\ ADB : \Delta\ Adb = AD^3 : Ad^3 = DB^{3/2} : db^{3/2}$$

é derivada de

$$\Delta\ ADB : \Delta\ Adb = AD.DB : Ad.db$$

e, a partir da proporção final,

$$AD^2 : Ad^2 = DB : db.$$

Assim, também é finalmente obtido

$$\Delta\ ABC : \Delta\ Abc = BC^3 : bc^3.$$

COROLÁRIO V – E, como DB, *db* são finalmente paralelos, e como os quadrados das linhas AD, A*d*, as áreas curvilíneas finais, ADB, A*db* serão (pela natureza da parábola) dois terços dos triângulos retângulos ADB, A*db* e os segmentos AB, A*b* serão um terço dos mesmos triângulos. E, assim, aquelas áreas e aqueles segmentos serão como os quadrados das tangentes AD, A*d*, e também das cordas e dos arcos AB, AB.

Escólio

Mas até aqui foi suposto que a ângulo de contato não é nem maior, nem infinitamente menor que os ângulos de contato formados pelos círculos e suas tangentes; isto é, que a curvatura no ponto A não é infinitamente pequena, nem grande, e que o intervalo AJ é de uma grandeza finita. Pois DB pode ser tomado como AD^3, em cujo caso nenhum círculo pode ser traçado através do ponto A, entre a tangente AD e a curva AB, e, portanto, o ângulo de contato será infinitamente menor do que aqueles dos círculos. E, pelo mesmo raciocínio, se DB for tomado sucessivamente como AD^4, AD^5, AD^6, AD^7 etc., teremos uma série de ângulos de contato prosseguindo *in infinitum*, onde cada termo seguinte é infinitamente menor do que o precedente. E se DB for tomado sucessivamente como AD^2, $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, $AD^{7/6}$ etc., teremos outra série infinita de ângulos de contato, o primeiro dos quais é do mesmo tipo que aquele dos círculos, o segundo é infinitamente maior, e cada ângulo seguinte infinitamente maior do que o precedente. Mas entre quaisquer dois desses ângulos, uma outra série de ângulos de contato intermediário pode ser interposta, prosseguindo de ambas as maneiras *in infinitum*, onde cada ângulo seguinte será infinitamente maior ou menor do que o precedente. Como se entre os termos AD^2 e AD^3 houvesse sido interposta a série $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{3/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$ etc.

E, novamente, entre quaisquer dois ângulos dessa série, uma nova série de ângulos intermediários pode ser interposta, diferindo uns dos outros por intervalos infinitos. Nem pode a Natureza ser confinada a quaisquer limites.

O que foi demonstrado para linhas curvas, e para as superfícies por elas compreendidas, pode ser facilmente aplicado às superfícies curvas e aos volumes dos sólidos. Esses Lemas são pressupostos, de modo a evitar o tédio das deduções que envolvem demonstrações *ad absurdum*, de acordo com o método dos antigos geômetras. Pois as demonstrações são mais curtas pelo método dos indivisíveis; mas como a hipótese dos indivisíveis parece um tanto dissonante, e, portanto, esse método é considerado menos geométrico, optei por reduzir as demonstrações das Proposições seguintes às primeira e última somas e razões das quantidades nascentes e evanescentes, isto é, aos limites daquelas somas e razões, e, assim, considerar como premissa, da forma mais sucinta possível, as demonstrações daqueles limites. Pois, dessa maneira, o mesmo é realizado pelo método dos indivisíveis, e estando agora aqueles princípios demonstrados, podemos usá-los com maior segurança. Portanto, se, de agora em diante, eu vier a considerar as quantidades como formadas por partículas, ou vier a tomar pequenas linhas curvas como retas, isso não significará quantidades indivisíveis, mas quantidades divisíveis evanescentes; nem as somas e razões de partes determinadas, mas sempre os limites das somas e das razões; e a força de tais demonstrações dependerá sempre do método exposto nos Lemas precedentes.

Talvez possa ser objetado que não há proporção final de quantidades evanescentes, porque a proporção, antes das quantidades desaparecerem, não é a última, e quando desaparecem, é nenhuma. Mas pelo mesmo argumento pode alegar-se que um corpo chegando a um certo lugar e lá parando, não tem velocidade final; pois a velocidade antes de o corpo chegar ao lugar não é a sua velocidade final; e quando ele chegar, não haverá nenhuma. Mas a resposta e fácil, pois, por velocidade final entende-se aquela com a qual o corpo move-se, nem antes de chegar à sua posição final, quando cessa o movimento, nem depois, mas no exato instante em que ele chega. Isto é aquela velocidade com a qual o corpo chega à sua posição final, e com a qual o movimento cessa. De forma semelhante, por razão final de quantidades evanescentes, deve-se entender a razão das quantidades nem antes, nem depois de desaparecerem, mas aquela com a qual elas desaparecem. Igualmente, a primeira razão de quantidades nascentes é aquela com a qual elas começam a ser. E a primeira ou última soma é aquela com a qual elas começam e deixam de ser (ou são aumentadas ou diminuídas). Há um limite que a velocidade no final do movimento pode atingir, mas não exce-

der. Essa é a velocidade final. E existe um mesmo limite em todas as quantidades e proporções que começam e deixam de ser. E uma vez que tais limites são certos e definidos, determiná-los é um problema estritamente geométrico. Mas o que for geométrico, pode ser utilizado para determinar e demonstrar qualquer outra coisa que também seja geométrica.

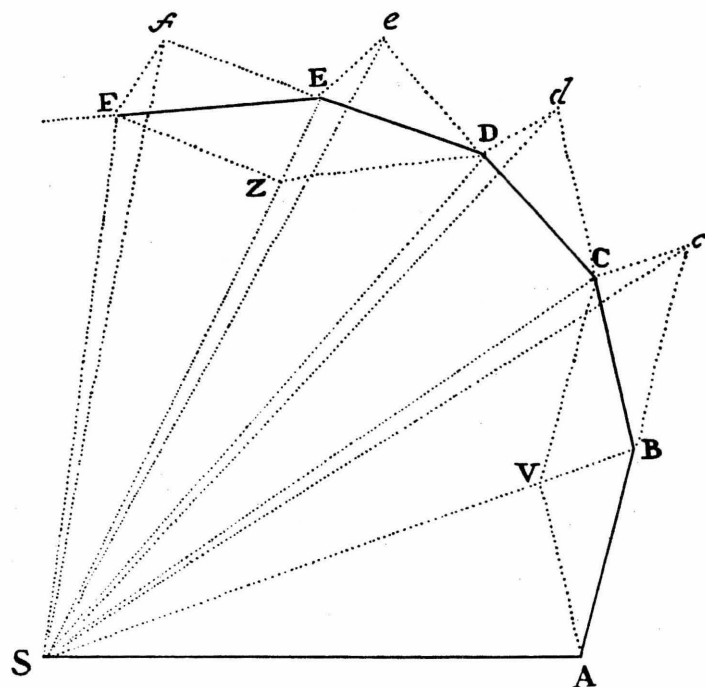
Pode-se ainda objetar que se forem dadas as razões finais de quantidades evanescentes, suas grandezas finais também serão dadas; e, assim, todas as quantidades consistirão de indivisíveis, o que contraria o que *Euclides* demonstrou no que se refere a incomensuráveis, no décimo Livro de seus *Elementos*. Mas essa objeção está fundamentada em uma falsa hipótese. Pois aquelas razões finais com as quais as quantidades desaparecem não são verdadeiramente as razões das quantidades finais, mas os limites para os quais as razões de quantidades, diminuindo sem limite, sempre convergem; e dos quais elas se aproximam mais do que por qualquer diferença dada, mas nunca além dela, nem de fato a alcançam, até que as quantidades sejam diminuídas *in infinitum*. Isso parecerá mais evidente em quantidades infinitamente maiores. Se duas quantidades, cuja diferença é dada, forem aumentadas *in infinitum*, a razão final dessas quantidades estará dada, isto é, a razão de igualdade. Mas não segue daí que as próprias quantidades finais ou maiores, das quais aquela é a razão, sejam dadas. Portanto, se no que segue, para ser mais facilmente compreendido, eu vier a chamar as quantidades de mínimas, evanescentes ou finais, não se deve considerá-las quantidades de qualquer grandeza determinada, mas deve-se concebê-las como quantidades que estão sempre diminuindo sem fim.

» SEÇÃO II

A determinação de forças centrípetas

PROPOSIÇÃO I. TEOREMA I

As áreas que os corpos que giram descrevem por meio de raios traçados até um centro de força imóvel situam-se nos mesmos planos imóveis, e são proporcionais aos tempos nos quais elas são descritas.

Suponha que o tempo seja dividido em partes iguais, e na primeira parte desse tempo faça o corpo descrever, pela sua força inata, a linha reta AB. Na segunda parte desse tempo, o corpo prosseguiria (pela Lei I), se não fosse impedido, diretamente até *c*, ao longo da linha B*c* igual a AB; tal que, pelos raios AS, BS, *c*S, traçados até o centro, as áreas iguais ASB, BS*c*, seriam descritas. Mas quando o corpo chega a B, suponha que uma força centrípeta atue imediatamente com um grande impulso, que, desviando o corpo de sua linha reta B*c*, força-o a continuar seu movimento ao longo da linha reta BC. Trace *c*C paralelamente a BS, encontrando BC em C; e no final da segunda parte do tempo, o corpo (pelo Corolário I das Leis), se encontrará em C, no mesmo plano que o triângulo ASB. Una SC, e, como SB e C*c* são paralelas, o triângulo SBC será igual ao triângulo SB*c*, e, portanto, também ao triângulo SAB. Pelo mesmo argumento, se a força centrípeta atuar sucessivamente em

C, D, E etc., e fizer o corpo, em cada partícula de tempo, descrever as linhas retas CD, DE, EF etc., elas irão todas situar-se no mesmo plano; e o triângulo SCD será igual ao triângulo SBC, e SDE a SCD, e SEF a SDE. E, portanto, em tempos iguais, áreas iguais são descritas em um plano imóvel; e, por composição, quaisquer somas SADS, SAFS, daquelas áreas, estão uma para a outra como os tempos nos quais são descritas. Então, faça o número daqueles triângulos aumentar, e suas larguras diminuírem *in infinitum*; e (pelo Corolário IV, Lema III), seu perímetro final ADF será uma linha curva. Portanto, a força centrípeta, pela qual o corpo é continuamente retirado da tangente dessa curva, atuará continuamente; e quaisquer áreas descritas SADS, SAFS, que são sempre proporcionais aos tempos em que são descritas, serão, também neste caso, proporcionais àqueles tempos. Q.E.D.

Corolário I – A velocidade de um corpo atraído para um centro imóvel, em espaços livres de resistência, é inversamente como a perpendicular incidente, a partir daquele centro, sobre a linha reta que toca a órbita. Pois as velocidades naqueles lugares A, B, C, D, E, são como as bases AB, BC, CD, DE, EF, de triângulos iguais; e estas bases são inversamente como as perpendiculares incidentes sobre elas.

Corolário II – Se as cordas AB, BC de dois arcos sucessivamente descritos em tempos iguais pelo mesmo corpo, em espaços livres de resistência, são completadas em um paralelogramo ABCV, e a diagonal BV desse parale-

logramo, na posição que esta adquire finalmente quando aqueles arcos são diminuídos *in infinitum*, é estendida para ambos os lados, ela passará através do centro de força.

COROLÁRIO III – Se as cordas AB, BC, e DE, EF, de arcos descritos em tempos iguais, em espaços livres de resistência, são completadas nos paralelogramos ABCV, DEFZ, as forças em B e E estão uma para a outra na razão final das diagonais BV, EZ, quando aqueles arcos são diminuídos *in infinitum*. Pois os movimentos BC e EF do corpo (pelo Corolário I das Leis) são compostos dos movimentos B*c*, BV e E*f*, EZ; mas BV e EZ, que são iguais a C*c* e F*f*, na demonstração desta Proposição, foram gerados pelos impulsos da força centrípeta em B e E, e são, portanto, proporcionais àqueles impulsos.

COROLÁRIO IV – As forças pelas quais os corpos, em espaços livres de resistência, são retirados de movimentos retilíneos e redirecionados para órbitas curvilíneas, estão uma para a outra como os senos versos de arcos descritos em tempos iguais; cujos senos versos tendem para o centro de força e bisseccionam as cordas quando aqueles arcos são infinitamente diminuídos. Pois tais senos versos são as metades das diagonais mencionadas no Corolário III.

COROLÁRIO V – E, portanto, aquelas forças estão para a força da gravidade como os mencionados senos versos estão para os senos versos perpendiculares ao horizonte daqueles arcos parabólicos, descritos pelos projéteis no mesmo tempo.

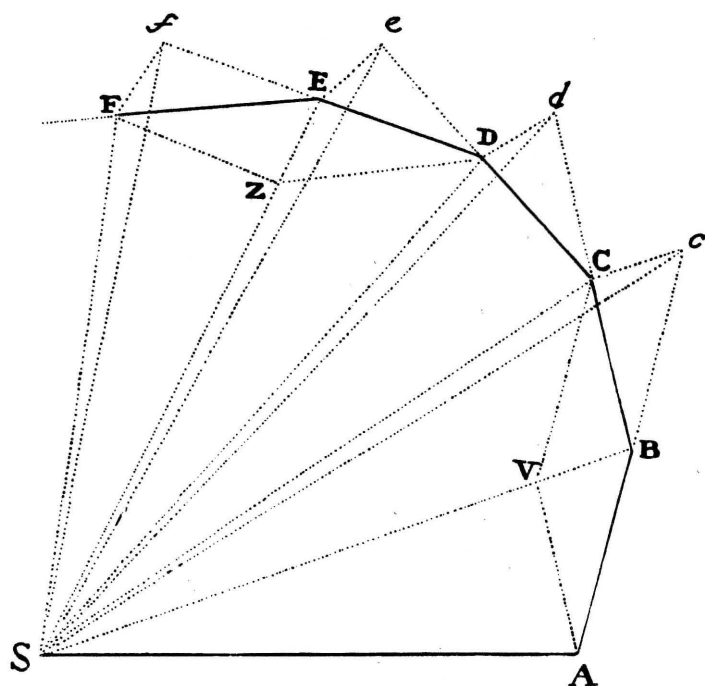
COROLÁRIO VI – O mesmo se aplica (pelo Corolário V das Leis) quando os planos nos quais os corpos são movidos, juntamente com os centros de força localizados naqueles planos, não se encontram em repouso, mas movem-se uniformemente para a frente em linhas retas.

PROPOSIÇÃO II. TEOREMA II

Todo corpo que se move em qualquer linha curva descrita em um plano, e por um raio traçado até um ponto imóvel ou que se move com um movimento retilíneo uniforme, e descreve, em torno deste ponto, áreas proporcionais aos tempos, é impelido por uma força centrípeta dirigida para aquele ponto.

CASO 1 – Pois todo corpo que se move em uma linha curva é (pela Lei I) desviado de seu curso retilíneo pela ação de alguma força que o impele. E esta força pela qual o corpo é afastado de seu curso retilíneo e levado a descrever, em tempos iguais, os triângulos mínimos iguais SAB, SBC,

SCD etc., em torno do ponto imóvel S (pela Proposição XL, Livro 1. *Elementos de Euclides*, e Lei II), atua na posição B, de acordo com a direção de uma linha paralela a *c*C, isto é, na direção da linha BS; e na posição C, de acordo com a direção de uma linha paralela a *d*D, isto é, na direção da linha CS etc.; e, portanto, atua sempre na direção de linhas que tendem para o ponto imóvel S. Q.E.D.

Caso 2 – E (pelo Corolário V das Leis) é indiferente se a superfície na qual um corpo descreve uma figura curvilínea está em repouso ou move-se uniformemente para frente em uma linha reta, juntamente com o corpo, a figura descrita e seu ponto S.

Corolário I – Em espaços ou meios não resistentes, se as áreas não forem proporcionais aos tempos, as forças não estarão dirigidas para o ponto no qual os raios se encontram, mas se desviarão dele, em direção à parte para a qual o movimento estiver dirigido, se a descrição das áreas for acelerada, e para longe daquela parte, se a descrição for retardada.

Corolário II – E mesmo em meios resistentes, se a descrição das áreas for acelerada, as direções das forças se desviarão daquele ponto no qual os raios se encontram, na direção da parte para a qual o movimento tende.

Escólio

Um corpo pode ser impelido por uma força centrípeta composta de várias forças; nesse caso, o significado da Proposição é que a força resultante de todas tende para o ponto S. Mas, se qualquer força atua continuamente na direção das linhas perpendiculares à superfície descrita, esta força fará o corpo desviar-se do plano de seu movimento; mas nem aumentará nem diminuirá a área da superfície descrita, e deve ser, portanto, ignorada na composição das forças.

PROPOSIÇÃO III. TEOREMA III

Todo corpo, que por um raio traçado até o centro de outro corpo, que é de alguma forma movido, descreve áreas proporcionais aos tempos em torno daquele centro, é impelido por uma força composta da força centrípeta, que tende para aquele outro corpo, e de toda a força acelerativa pela qual aquele outro corpo é impelido.

Que L represente o primeiro corpo, e T o segundo; e (pelo Corolário VI das Leis) se ambos os corpos são impelidos na direção de linhas paralelas, por uma nova força igual e contrária àquela pela qual o segundo corpo T é impelido, o primeiro corpo L prosseguirá descrevendo em torno de T as mesmas áreas que antes. Mas a força pela qual aquele outro corpo T foi impelido, será agora anulada por uma força igual e contrária; e, portanto, (pela Lei I), aquele outro corpo T, agora abandonado a si mesmo, irá ou repousar ou mover-se uniformemente para a frente em linha reta; e o primeiro corpo L, impelido pela diferença das forças, isto é, pela força remanescente, continuará descrevendo em trono do outro corpo T áreas proporcionais aos tempos. E, portanto (pelo Teorema II), a diferença das forças está dirigida para o outro corpo T, que é seu centro. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se o corpo L, por um raio traçado até o outro corpo T, descreve áreas proporcionais aos tempos; e daquela força total, pela qual o primeiro corpo L é impelido (se essa força é simples ou, de acordo com o Corolário II das Leis, composta de várias forças), subtrairmos (pelo mesmo Corolário) aquela força acelerativa total pela qual o outro corpo é impelido, a força remanescente total, pela qual o primeiro corpo é impelido, tenderá para o outro corpo T, que é centro.

COROLÁRIO II – E, se estas áreas são aproximadamente proporcionais aos tempos, a força remanescente tenderá, aproximadamente, para o outro corpo T.

COROLÁRIO III – E, *vice versa*, se a força remanescente tender aproximadamente para o outro corpo T, aquelas áreas serão aproximadamente proporcionais aos tempos.

COROLÁRIO IV – Se o corpo L, por um raio traçado até o outro corpo T, descrever áreas, que são muito desiguais, se comparadas aos tempos; esteja aquele outro corpo T em repouso ou movendo-se uniformemente em linha reta, a ação da força centrípeta que tende para aquele outro corpo T será inexistente, ou mista e composta de ações muito poderosas de outras forças; e a força total composta de todas elas, se forem muitas, estará dirigida para outro centro (imóvel ou móvel). O mesmo acontece quando o outro corpo for movido por qualquer que seja o movimento, desde que aquela força centrípeta permaneça, após subtrair-se daquela força total que atua sobre aquele outro corpo T.

Escólio

Uma vez que a descrição igual de áreas indica que há um centro para o qual tende aquela força pela qual o corpo é mais afetado, e pela qual ele é retirado de seu movimento retilíneo e retido em sua órbita, por que não nos é permitido, no que segue, usar a descrição igual de áreas como uma indicação de um centro, em torno do qual todo movimento circular é realizado em espaços livres?

PROPOSIÇÃO IV. TEOREMA IV[1]

As forças centrípetas de corpos, que por movimentos iguais descrevem círculos diferentes, tendem para os centros dos mesmos círculos; e estão umas para as outras como os quadrados dos arcos descritos em tempos iguais, divididos, respectivamente, pelos raios dos círculos.

Essas forças tendem para os centros dos círculos (pela Proposição II, e Corolário II, Proposição I) e estão uma para a outra como os senos versos dos menores arcos descritos em tempos iguais (pelo Corolário IV, proposição I); isto é, como os quadrados dos mesmos arcos divididos pelos diâmetros dos círculos (pelo Lema VII); e, portanto, uma vez que aqueles arcos são como arcos descritos em quaisquer tempos iguais, e os diâmetros são como

1. Ver nota 15 do Apêndice.

os raios, as forças serão como os quadrados de quaisquer arcos descritos no mesmo tempo, divididos pelos raios dos círculos. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, uma vez que aqueles arcos são como as velocidades dos corpos, as forças centrípetas são como os quadrados das velocidades divididos pelos raios.

COROLÁRIO II – E uma vez que os tempos periódicos são como os raios divididos pelas velocidades, as forças centrípetas são como os raios divididos pelos quadrados dos tempos periódicos.

COROLÁRIO III – Dessa forma, se os tempos periódicos forem iguais, e as velocidades, portanto, como os raios, as forças centrípetas serão também como os raios; e vice-versa.

COROLÁRIO IV – Se os tempos periódicos e as velocidades forem ambos como as raízes quadradas dos raios, as forças centrípetas serão iguais entre si; e vice-versa.

COROLÁRIO V – Se os tempos periódicos forem como os raios, e as velocidades, portanto, iguais, as forças centrípetas serão inversamente como os raios; e vice-versa.

COROLÁRIO VI – Se os tempos periódicos forem como os raios elevados à potência 3/2, e as velocidades, portanto, inversamente como as raízes quadradas dos raios, as forças centrípetas serão inversamente como os quadrados dos raios; e vice-versa.

COROLÁRIO VII – E, geralmente, se o tempo periódico for como qualquer potência R^n do raio R, e a velocidade, portanto, inversamente como a potência R^{n-1} do raio, a força centrípeta será inversamente como a potência R^{2n-1} do raio; e vice-versa.

COROLÁRIO VIII – O mesmo vale para os tempos, as velocidades e as forças com os quais corpos descrevem partes semelhantes de quaisquer figuras semelhantes que tenham seus centros em uma posição semelhante em relação àquelas figuras; como se obtém empregando a demonstração dos casos precedentes àqueles. E a aplicação é fácil, bastando substituir a descrição igual de áreas no lugar de movimento igual, e usando as distâncias dos corpos a partir dos centros em vez dos raios.

COROLÁRIO IX – A partir da mesma demonstração, resulta igualmente que o arco descrito por um corpo em um tempo qualquer, girando uniformemente em um círculo com uma dada força centrípeta, é uma média proporcional entre o diâmetro do círculo e o espaço que o mesmo corpo, caindo pela mesma força dada, descreveria no mesmo tempo dado.

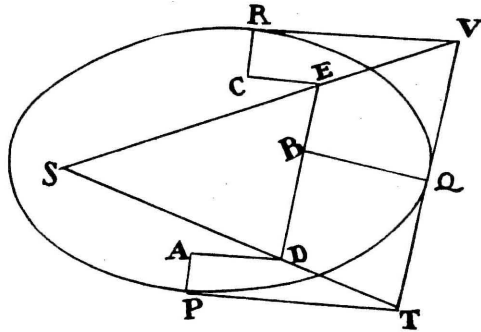
Escólio

O caso do sexto Corolário prevalece nos corpos celestes (como Sir *Christopher Wren*, Dr. *Hooke* e Dr. *Halley*, separadamente observaram); e, portanto, no que segue, pretendo tratar de forma mais geral o que está relacionado à força centrípeta que decresce na razão quadrada das distâncias a partir dos centros.

Além disso, por meio da Proposição anterior e de seus Corolários, podemos descobrir a proporção de uma força centrípeta para qualquer outra força conhecida, como a da gravidade. Porque se um corpo, por meio de sua gravidade, gira em um círculo concêntrico à Terra, essa gravidade é a força centrípeta daquele corpo. Mas a partir da queda de corpos pesados, o tempo de uma revolução completa é obtido, bem como o arco descrito em qualquer tempo dado (pelo Corolário IX desta Proposição). E por tais Proposições, Mr. *Huygens*, em seu excelente livro *De Horologio Oscillatorio*, comparou a força da gravidade com as forças centrífugas dos corpos que giram.

A Proposição anterior pode ser igualmente demonstrada da seguinte forma: em um círculo qualquer, suponha um polígono inscrito, com um número qualquer de lados. E se um corpo, movido com uma dada velocidade ao longo dos lados do polígono, é refletido a partir do círculo nos vários pontos angulares, a força com a qual ele atinge o círculo em cada reflexão será como a sua velocidade; e, portanto, a soma das forças, em um tempo dado, será como o produto daquela velocidade e o número de reflexões; isto é (se o tipo de polígono for dado), como o comprimento descrito naquele tempo dado, e aumentada ou diminuída na razão do mesmo comprimento para o raio do círculo; isto é, como o quadrado daquele comprimento dividido pelo raio; e, então, o polígono, tendo seus lados diminuídos *in infinitum*, coincide com o círculo, como o quadrado do arco descrito em um tempo dado dividido pelo raio. Esta é a força centrífuga com a qual o corpo impele o círculo; e essa força é igual à força contrária, com a qual o círculo continuamente repele o corpo em direção ao centro.

Proposição V. Problema I

Sendo dada, em quaisquer lugares, a velocidade com a qual um corpo descreve uma dada figura, por meio de forças dirigidas a algum centro comum, é requerido encontrar esse centro.

Faça as três linhas retas PT, TQV, VR tocarem a figura descrita nos pontos P, Q, R, encontrando-se em T e V. Trace PA, QB e RC perpendicularmente às tangentes, e inversamente proporcionais às velocidades do corpo nos pontos P, Q, R, a partir dos quais as perpendiculares foram levantadas; isto é, de forma que PA esteja para QB como a velocidade em Q está para a velocidade em P, e QB para RC como a velocidade em R está para a velocidade em Q. Através das extremidades A, B, C das perpendiculares, trace AD, DBE, EC, em ângulos retos, encontrando-se em D e E; e as linhas retas TD, VE, originadas, encontrar-se-ão em S, como centro.

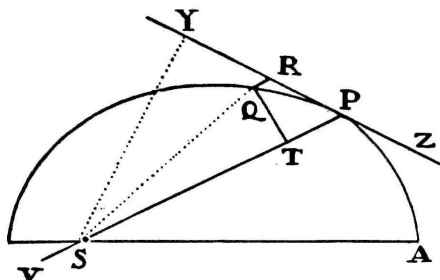
Pois as perpendiculares traçadas a partir do centro S sobre as tangentes PT, QT, são inversamente como as velocidades dos corpos nos pontos P e Q (pelo Corolário I, Proposição I), e, portanto, por construção, diretamente como as perpendiculares AP, BQ; isto é, como as perpendiculares traçadas a partir do ponto D sobre as tangentes. Portanto, é fácil inferir que os pontos S, D, T estão em uma linha reta. E, pelo mesmo argumento, os pontos S, E, V também estão em uma linha reta; e, portanto, o centro S está no ponto onde as linhas retas TD, VE encontram-se. Q.E.D.

Proposição VI. Teorema V

Em um espaço livre de resistência, se um corpo girar em qualquer órbita em torno de um centro imóvel, e em um tempo mínimo descreve qualquer arco então nascente; e supondo que o seno verso daquele arco é traçado bisseccionando a corda, e estendido de forma a passar pelo centro de força: a força centrípeta no meio do arco será diretamente como o seno verso e inversamente como o quadrado do tempo.

Pois o seno verso em um tempo dado é como a força (pelo Corolário IV, Proposição I); e, aumentando-se o tempo numa razão qualquer, por

ser o arco aumentando na mesma razão, o seno verso será aumentado no quadrado daquela razão (pelos Corolários II e III, Lema XI), e, portanto, é como a força e o quadrado do tempo. Divida ambos os lados pelo quadrado do tempo, e a força será diretamente como o seno verso, e inversamente como o quadrado do tempo. Q.E.D.

E o mesmo pode ser facilmente demonstrado pelo Corolário IV, Lema X.

Corolário I – Se um corpo P girando em torno do centro S descreve uma linha curva APQ, a qual é tocada por uma linha reta ZPR em qualquer ponto P; e a partir de qualquer outro ponto Q da curva, QR é traçado paralelamente à distância SP, encontrando a tangente em R; e QT é traçado perpendicularmente à distância SP; a força centrípeta será inversamente como o sólido $\frac{SP^2.QT^2}{QR}$, se o sólido for considerado naquela grandeza que finalmente adquire quando os pontos P e Q coincidem. Pois QR é igual ao seno verso do dobro do arco QP, cujo meio é P: e o dobro do triângulo SQP, ou SP.QT, é proporcional ao tempo no qual esse arco duplo é descrito; e, portanto, pode ser usado para representar o tempo.

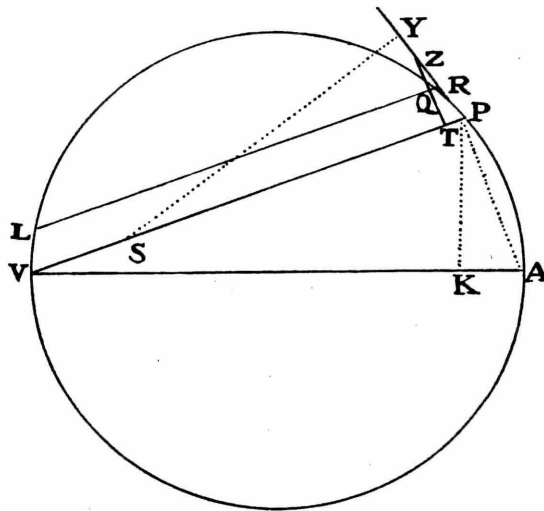
Corolário II – Por um raciocínio semelhante, a força centrípeta é inversamente como o sólido $\frac{SY^2.QP^2}{QR}$; se SY for uma perpendicular traçada a partir do centro de força sobre PR, a tangente da órbita. Pois os retângulos SY.QP e SP.QT são iguais.

Corolário III – Se a órbita for um círculo, ou tocar ou *cortar um círculo* concentricamente, isto é, formar com um círculo o menor ângulo de contato ou seção, tendo a mesma curvatura e o mesmo raio de curvatura no ponto P; e se PV for uma corda deste círculo, traçada a partir do corpo através do centro de força; a força centrípeta será inversamente como o sólido $SY^2.PV$. Pois PV é $\frac{QP^2}{QR}$.

COROLÁRIO IV – O mesmo sendo suposto, a força centrípeta é diretamente como o quadrado da velocidade, e inversamente como aquela corda. Pois a velocidade é reciprocamente como a perpendicular SY, pelo Corolário I, Proposição I.

COROLÁRIO V – Assim, se qualquer figura curvilínea APQ for dada, e nela um ponto S também for dado, para o qual uma força centrípeta é dirigida continuamente, aquela lei da força centrípeta poderá ser encontrada, pela qual o corpo P será continuamente retirado de um curso retilíneo e, sendo mantido no perímetro daquela figura, descreverá a mesma por uma revolução contínua. Isto é, deveremos obter, por cálculo, o sólido $\frac{SP^2.QT^2}{QR}$ ou o sólido $SY^2.PV$, inversamente proporcionais a esta força. Exemplos disso serão dados nos problemas seguintes.

PROPOSIÇÃO VII. PROBLEMA II

Se um corpo gira na circunferência de um círculo, propõe-se encontrar a lei da força centrípeta dirigida para um ponto dado qualquer.

Seja VQPA a circunferência do círculo; S o ponto dado para qual a força tende como a um centro; P o corpo que se move na circunferência; Q o próximo lugar para o qual ele deverá mover-se; e PRZ a tangente do círculo, no lugar precedente. Através do ponto S trace a corda PV, e o diâmetro VA do círculo; una AP e trace QT perpendicularmente a SP, que estendi-

da, pode encontrar a tangente PR em Z; e, finalmente, através do ponto Q trace LR paralelamente a SP, encontrando o círculo em L, e a tangente PZ em R. E, devido à semelhança dos triângulos ZQR, ZTP, VPA, teremos

$$RP^2 : QT^2 = AV^2 : PV^2.$$

Uma vez que $RP^2 = RL.QR$,

$$QT^2 = \frac{RL.QR.PV^2}{AV^2}$$

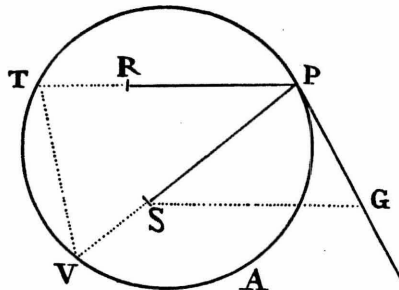
Multiplique aquelas igualdades por $\frac{SP^2}{QR}$, e com os pontos P e Q coincidindo, use PV para RL; então, teremos

$$\frac{SP^2.PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2.QT^2}{QR}.$$

E, portanto (pelos Corolários I e V, Proposição VI), a força centrípeta é inversamente como $\frac{SP^2.PV^3}{AV^2}$; isto é (porque AV^2 é dado), inversamente como o produto de SP^2 e PV^3. Q.E.I.

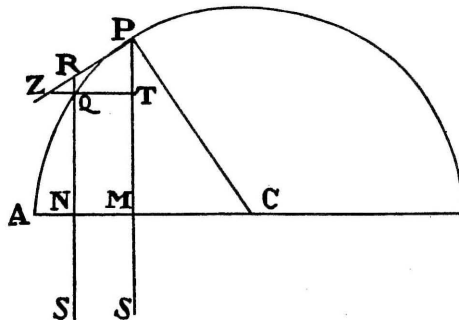
O MESMO DE OUTRA MANEIRA:

Sobre a tangente PR, trace a perpendicular SY; e, (devido à semelhança dos triângulos SYP, VPA), teremos AV para PV como SP para SY, e, portanto, $\frac{SP.PV}{AV} = SY$, e $\frac{SP^2.PV^3}{AV^2} = SY^2.PV$. E, portanto (pelos Corolários III e V, Proposição VI), a força centrípeta é inversamente como $\frac{SP^2.PV^3}{AV^2}$; isto é (porque AV é dado), inversamente como $SP^2.PV^3$. Q.E.I.

COROLÁRIO I – Assim, se o ponto dado S, para o qual a força centrípeta sempre tende, é colocado na circunferência do círculo, como em V, a força centrípeta será inversamente como a quinta potência da altura SP.

COROLÁRIO II – A força pela qual o corpo P gira no círculo APTV, em torno do centro de força S, está para a força pela qual o mesmo corpo pode girar no mesmo círculo, e no mesmo tempo periódico, em torno de qualquer outro centro de força R, como $RP^2.SP$ está para o cubo da linha reta SG, a qual é traçada a partir do primeiro centro de força S, paralelamente à distância PR do corpo a partir do segundo centro de força R, encontrando a tangente PG da órbita em G. Pois, pela construção desta Proposição, a primeira força está para a última como $RP^2.PT^3$ está para $SP^2.PV^3$; isto é, como $SP.RP^2$ para $\frac{SP^3.PV^3}{PT^3}$; ou (devido à semelhança dos triângulos PSG, TPV), está para SG^3.

COROLÁRIO III – A força pela qual o corpo P, em qualquer órbita, gira em torno do centro de força S, está para a força pela qual o mesmo corpo pode girar na mesma órbita, e no mesmo tempo periódico, em torno de qualquer outro centro de força R, como o sólido $SP.RP^2$, contido sob a distância do corpo a partir do primeiro centro de força S, e o quadrado de sua distância a partir do segundo centro de força R, para o cubo da linha reta SG, traçada a partir do primeiro centro de forças S paralelamente à distância RP do corpo a partir do segundo centro de força R, encontrando a tangente PG da órbita em G. Pois a força nesta órbita, em qualquer ponto P, é a mesma que em um círculo de mesma curvatura.

PROPOSIÇÃO VIII. PROBLEMA III

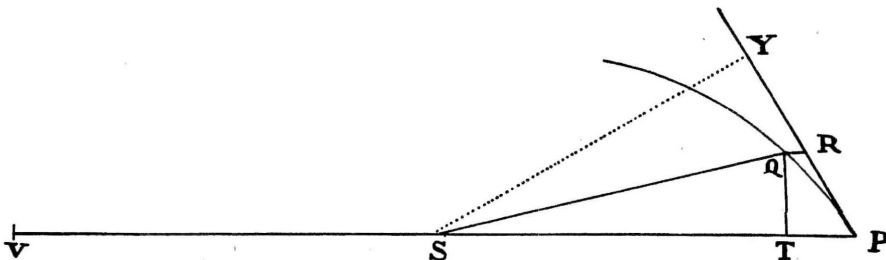
Se um corpo se move em uma semicircunferência PQA, *propõe-se encontrar a lei da força centrípeta que tende para um ponto* S, *tão remoto que todas as linhas* PS, RS *traçadas naquela direção podem ser consideradas paralelas.*

A partir de C, o centro do semicírculo, trace o semidiâmetro CA, de forma a cortar as paralelas em ângulos retos em M e N, e una CP. Pela semelhança dos triângulos CPM, PZT e RZQ, teremos $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$. A partir da natureza do círculo, $PR^2 = QR(RN+QN) = QR.2PM$, quando os pontos P e Q coincidem. Portanto, $CP^2 : PM^2 = QR.2PM : QT^2$; e $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, e $\frac{QT^2.SP^2}{QR} = \frac{2PM^3.SP^2}{CP^2}$. E, portanto, (pelos Corolários I e V, Proposição VI), a força centrípeta é inversamente como $\frac{2PM^3.SP^2}{CP^2}$; ou seja (desprezando a razão dada $\frac{2SP^2}{CP^2}$), inversamente como PM^3. Q.E.I.

E o mesmo pode ser facilmente inferido da Proposição precedente.

Escólio

E, por um raciocínio semelhante, um corpo será movido em uma elipse, ou mesmo em uma hipérbole ou parábola, por uma força centrípeta que é inversamente como o cubo da ordenada dirigida para um centro de força infinitamente remoto.

Proposição IX. Problema IV

Se um corpo gira em uma espiral PQS, *cortando todos os raios* SP, SQ *etc., com um dado ângulo; propõe-se encontrar a lei da força centrípeta que tende para o centro dessa espiral.*

Supondo um ângulo indefinidamente pequeno PSQ, então, como todos os ângulos são dados, a figura SPRQT estará dada. Portanto, a razão $\frac{QT}{QR}$ é também dada, e $\frac{QT^2}{QR}$ é como QT, ou seja (porque a figura está dada),

como SP. Mas se o ângulo PSQ for de alguma forma mudado, a linha reta QR, adjacente ao ângulo de contato QPR (pelo Lema XI) mudará na razão de PR^2 ou QT^2. Portanto, a razão $\frac{QT^2}{QR}$ permanece a mesma que antes, isto é, como SP. E, $\frac{QT^2.SP^2}{QR}$ é como SP^3 e, portanto, (pelos Corolários I e V, Proposição VI) a força centrípeta é inversamente como o cubo da distância SP. Q.E.I.

O MESMO DE OUTRA MANEIRA:

A perpendicular SY que incide sobre a tangente, e a corda PV do círculo que corta concentricamente a espiral, estão em razões dadas para a altura SP; e, portanto, SP^3 é como $SY^2.PV$, isto é (pelos Corolários III e V, Proposição VI), inversamente como a força centrípeta.

LEMA XII

Todos os paralelogramos circunscritos aos diâmetros conjugados de uma elipse ou hipérbole são iguais entre si.

Isto é demonstrado pelos escritores que tratam das seções cônicas.

PROPOSIÇÃO X. PROBLEMA V

Se um corpo gira em uma elipse, propõe-se encontrar a lei da força centrípeta que tende para o centro da elipse.

Supondo que CA e CB sejam semi-eixos da elipse; GP e DK, os diâmetros conjugados; PF e QT, Qv, uma ordenada referente ao diâmetro GP; e se o paralelogramo $QvPR$ for completado, então (pelas propriedades das seções cônicas), $Pv.vG : Qv^2 = PC^2 : CD^2$, e, devido à semelhança dos triângulos QvT, PCF, $Qv^2 : QT^2 = PC^2 : PF^2$; e, eliminando Qv^2, $vG : \frac{QT^2}{Pv} = PC^2 : \frac{CD^2.PF^2}{PC^2}$.

Uma vez que $QR = Pv$, e (pelo lema XII) $BC.CA = CD.PF$, e, quando os pontos P e Q coincidirem, $2PC = vG$, teremos, multiplicando os extremos e os meios juntos, $\frac{QT^2.PC^2}{QR} = \frac{2BC^2.CA^2}{PC}$.

Portanto (pelo Corolário V, Proposição VI), a força centrípeta é inversamente como $\frac{2BC^2.CA^2}{PC}$; isto é (porque $2BC^2.CA^2$ é dado), inversamente como $\frac{1}{PC}$; ou seja, diretamente como a distância PC. Q.E.I.

O Mesmo de Outra Maneira:

Tome o ponto u na linha reta PG, do outro lado do ponto T, tal que Tu seja igual a Tv; então, tome uV tal que $uV : vG = DC^2 : PC^2$. Uma vez que, pelas seções cônicas, $Qv^2 : Pv.vG = DC^2 : PC^2$, temos $Qv^2 = Pv.uV$. Somando $Pu.Pv$ a ambos os lados, o quadrado da corda do arco PQ será igual ao retângulo PV.Pv; e, portanto, um círculo que toque a seção cônica em P e passe pelo ponto Q, também passará pelo ponto V. Agora faça os pontos P e Q encontrarem-se, e a razão de uV para vG, que é a mesma que a de DC^2 para PC^2, tornar-se-á a razão de PV para PG, ou PV para 2PC; e, portanto, PV será igual a $\frac{2DC^2}{PC}$. E, então, a força que faz com que o corpo P gire na elipse será inversamente como $\frac{2DC^2}{PC}.PF^2$ (pelo Corolário III, Proposição VI); *isto* é (como $2DC^2.PF^2$ é dado), diretamente como PC. Q.E.I.

Corolário I – E, portanto, a força é como a distância do corpo a partir do centro da elipse; e, *vice versa*, se a força é como a distância, o corpo se moverá em uma elipse cujo centro coincide com o centro de força, ou talvez em um círculo, em que a elipse pode redundar.

COROLÁRIO II – E os tempos periódicos das revoluções realizadas em todas as elipses, sejam elas quais forem, em torno do mesmo centro, serão iguais. Pois esses tempos em elipses semelhantes serão iguais (pelos Corolários III e VIII, Proposição IV); porém, em elipses que tenham o eixo maior comum, esses tempos estão um para o outro diretamente como as áreas totais das elipses, e inversamente como as partes das áreas descritas no mesmo tempo; isto é, diretamente como os eixos menores, e inversamente como as velocidades dos corpos em seus vértices principais; isto é, diretamente àqueles eixos menores, e inversamente como as ordenadas referentes ao mesmo ponto dos eixos comuns; e, portanto (pela igualdade das razões direta e inversa), na razão de igualdade 1 : 1.

Escólio

Se a elipse, tendo o seu centro removido para uma distância infinita, degenerar em uma parábola, o corpo se moverá nessa parábola; e a força, agora tendendo para um centro infinitamente remoto, se tornará constante. Este é o teorema de Galileu. E se a seção parabólica do cone (mudando-se a inclinação do plano de corte com relação ao cone) degenera em uma hipérbole, o corpo se moverá no perímetro dessa hipérbole, tendo sua força centrípeta transformada em uma força centrífuga. E, da mesma forma, como no círculo, ou na elipse, se as forças são dirigidas para o centro da figura localizada na abcissa, aquelas forças – aumentando ou diminuindo as ordenadas em qualquer razão dada, ou mesmo mudando o ângulo de inclinação das ordenadas com relação às abcissas – elas serão sempre aumentadas ou diminuídas na razão das distâncias a partir do centro, desde que os tempos periódicos de revolução permaneçam iguais; da mesma forma, em toda e qualquer figura, se as ordenadas forem aumentadas ou diminuídas em qualquer razão dada, ou se suas inclinações forem, de algum modo, alteradas, os tempos periódicos permanecendo os mesmos, as forças dirigidas para qualquer centro localizado na abcissa serão, nas diversas ordenadas, aumentadas ou diminuídas na razão das distâncias a partir do centro.

» SEÇÃO III

O movimento de corpos em seções cônicas excêntricas

PROPOSIÇÃO XI. PROBLEMA VI

Se um corpo gira em uma elipse, propõe-se encontrar a lei da força centrípeta que tende para o foco da elipse.

Seja S o foco da elipse. Trace SP cortando o diâmetro DK da elipse em E, e a ordenada Qv em x; e complete o paralelogramo QxPR. É evidente que EP é igual ao semi-eixo maior AC: pois, traçando HI a partir do outro foco H da elipse paralelamente a EC, como CS, CH são iguais, ES e EI serão também iguais; de forma que EP é a metade da soma de PS e PI, isto é (por causa das paralelas HI e PR, e dos ângulos iguais IPR e HPZ), de PS e PH, que, tomados juntos, são iguais ao comprimento de todo o eixo 2AC. Trace QT perpendicular a SP, e chamando o *latus rectum** principal da elipse de L (ou $\frac{2BC^2}{AC}$), teremos

$$L.QR : L.Pv = QR : Pv = PE : PC = AC : PC, \text{ também}$$
$$L.Pv : Gv.Pv = L : Gv, \text{ e, } Gv.Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2.$$

* *Latus rectum* ou Corda Focal Mínima é a corda levantada pelo foco perpendicularmente ao eixo principal da cônica (N.T.).

Pelo Corolário II, Lema VII, quando os pontos P e Q coincidem, $Qv^2 = Qx^2$, e Qx^2 ou $Qv^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = CA^2 : PF^2$, e (pelo Lema XII) $= CD^2 : CB^2$. Multiplicando-se os termos correspondentes das quatro proposições e simplificando, teremos

$$L.QR : QT^2 = AC.L.PC^2.CD^2 : PC.Gv.CD^2.CB^2 = 2PC : Gv,$$

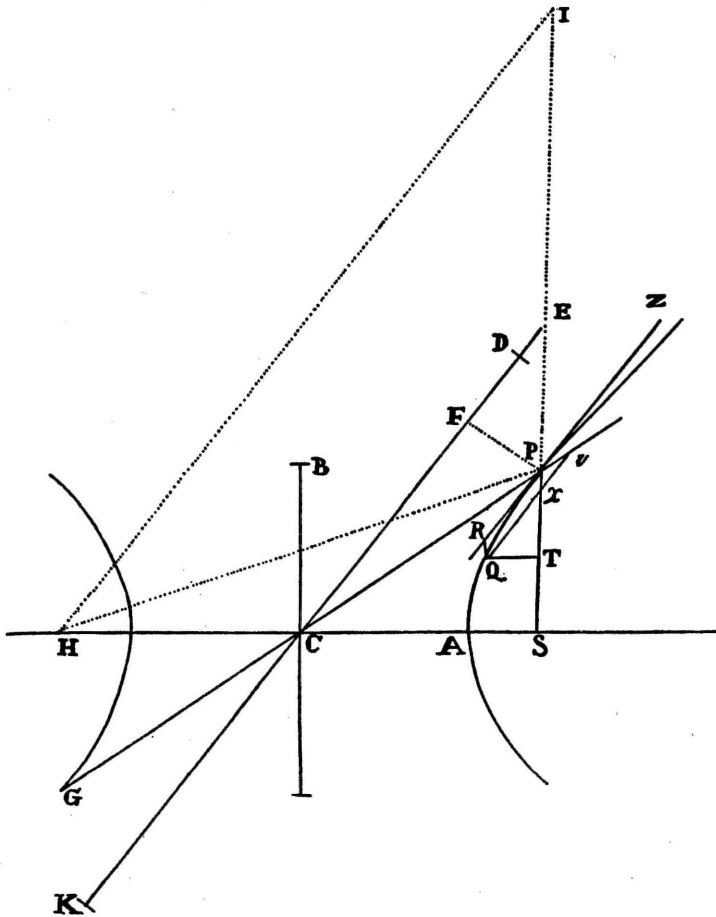
visto que $AC.L = 2BC^2$. Porém, se os pontos P e Q coincidirem, 2PC e G*v* serão iguais. E, portanto, as quantidades L.QR e QT^2, proporcionais àquelas, também serão iguais. Multiplique aquelas quantidades iguais por $\frac{SP^2}{QR}$, e $L.SP^2$ será igual a $\frac{SP^2.QT^2}{QR}$. Assim (pelos Corolários I e V, Proposição VI), a força centrípeta é inversamente como $L.SP^2$, isto é, inversamente como o quadrado da distância SP. Q.E.I.

O Mesmo de Outra Maneira:

Uma vez que a força que tende para o centro da elipse, pela qual o corpo P pode nela girar, está (pelo Corolário I, Proposição X) *como a distância* CP do corpo a partir do centro C da elipse, trace CE paralelamente à tangente PR da elipse; e a força pela qual o mesmo corpo P pode girar em torno de qualquer outro ponto S da elipse, se CE e PS interceptam-se em E, será como $\frac{PE^3}{SP^2}$ (pelo Corolário III, Proposição VII); isto é, se o ponto S for o foco da elipse, e, portanto, PE for dado como SP^2 reciprocamente. Q.E.I.

Com a mesma brevidade com a qual reduzimos o quinto Problema à parábola e à hipérbole, podemos fazer o mesmo aqui; porém, dada a importância do Problema e sua aplicação no que segue, confirmarei os outros casos com demonstrações particulares.

PROPOSIÇÃO XII. PROBLEMA VII

Suponha que um corpo se mova em uma hipérbole; propõe-se encontrar a lei da força centrípeta que tende para o foco dessa figura.

Sejam CA e CB os semi-eixos da hipérbole; PG e KD outros diâmetros conjugados; PF uma perpendicular ao diâmetro KD, e Q*v* uma ordenada para o diâmetro GP. Trace SP cortando o diâmetro DK em E, e a ordenada Q*v* em *x*, e complete o paralelogramo QRP*x*. É evidente que EP é igual ao eixo semi-transverso AC; pois, traçando HI a partir do outro foco H da hipérbole, para-

lelamente a EC, como CS, CH são iguais, ES, EI serão também iguais, de maneira que EP é a metade da diferença entre PS e PI; isto é (por causa das paralelas IH e PR, e dos ângulos iguais IPR e HPZ), entre PS e PH, a diferença dos quais é igual ao eixo inteiro 2AC. Trace QT perpendicularmente a SP, e representando por L o *latus rectum* da hipérbole (isto é, por $\frac{2BC^2}{AC}$), teremos

$$L.QR : L.Pv = QR : Pv = Px : Pv = PE : PC = AC : PC,$$

e também $L.Pv : Gv.Pv = L : Gv$, e $Gv.Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2$. Pelo Corolário II, Lema VII, quando P e Q coincidirem, $Qx^2 = Qv^2$, e

$$Qx^2 \text{ ou } Qv^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = CA^2 : PF^2,$$

pelo Lema XII, $= CD^2 : CB^2$. Multiplicando os termos correspondentes das quatro proporções, e simplificando,

$$L.QR : QT^2 = AC.L.PC^2.CD^2 : PC.Gv.CD^2.CB^2 = 2PC : Gv,$$

desde que $AC.L = 2BC^2$. Mas se os pontos P e Q coincidirem, 2PC e Gv serão iguais. E, portanto, as quantidades L.QR e QT^2, proporcionais a elas, também serão iguais. Calculando essas igualdades em $\frac{SP^2}{QR}$, teremos $L.SP^2$ igual a $\frac{SP^2.QT^2}{QR}$. E, portanto, (pelos Corolários I e V, Proposição VI), a força centrípeta será inversamente como $L.SP^2$, isto é, inversamente como o quadrado da distância SP. Q.E.I.

O Mesmo de Outra Maneira:

Encontrar a força que tende para o centro da hipérbole. Esta será proporcional à distância CP. Mas por esse motivo (pelo Corolário III, Proposição VII), a força que tende para o foco S será como $\frac{PE^3}{SP^2}$, porque PE é dado reciprocamente como SP^2. Q.E.I.

E, da mesma forma, pode-se demonstrar que um corpo, tendo sua força centrípeta alterada para uma força centrífuga, mover-se-á na hipérbole conjugada.

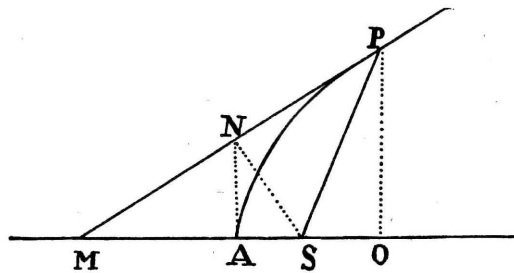
Lema XIII

O latus rectum *de uma parábola pertencente a qualquer vértice é quatro vezes a distância desse vértice ao foco da figura.*

Isso é demonstrado por escritores que tratam de seções cônicas.

LEMA XIV

A perpendicular, levantada a partir do foco de uma parábola sobre sua tangente, é uma média proporcional entre as distâncias do focò ao ponto de contato, e do foco ao vértice principal da figura.

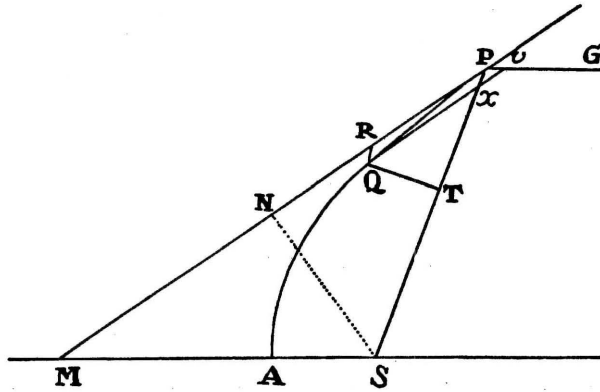
Seja AP a parábola, S o seu foco, A o seu vértice principal, P o ponto de contato, PO uma ordenada em relação ao diâmetro principal, PM a tangente que encontra o diâmetro principal em M, e SN a perpendicular que parte do foco e incide sobre a tangente; una AN e, como as linhas MS e SP, MN e NP, MA e AO são iguais, as linhas retas AN e OP serão paralelas e, por isso, o triângulo SAN terá um ângulo reto em A, e será semelhante aos triângulos iguais SNM, SNP: portanto, PS está para SN, assim como SN está para SA. Q.E.D.

COROLÁRIO I – PS^2 está para SN^2 como PS está para SA.

COROLÁRIO II – E como SA é dado, SN^2 irá variar como PS.

COROLÁRIO III – E a interseção de qualquer tangente PM com a linha reta SN, traçada a partir do foco perpendicularmente à tangente, incide na linha reta AN que toca a parábola no vértice principal.

PROPOSIÇÃO XIII. PROBLEMA VIII

Se um corpo move-se no perímetro de uma parábola, propõe-se encontrar a lei da força centrípeta que tende para o foco dessa figura.

Mantendo a construção do Lema precedente, seja P o corpo no perímetro da parábola; e a partir do lugar Q, para o qual o corpo irá, trace QR paralelamente a SP e QT perpendicularmente a SP, como também Q*v* paralelamente à tangente, encontrando o diâmetro PG em *v*, e a distância SP

em x. Agora, por causa dos triângulos semelhantes Pxv, SPM, e dos lados iguais SP e SM de um, os lados Px ou QR e Pv do outro também serão iguais. Mas (pelas seções cônicas) o quadrado da ordenada Qv é igual ao retângulo sob o *latus rectum* e o segmento Pv do diâmetro; isto é (pelo Lema XIII), ao retângulo 4PS.Pv ou 4PS.QR; e os pontos P e Q coincidindo (pelo Corolário II, Lema VII), Qx = Qv. E, portanto, Qx^2, neste caso, torna-se igual ao retângulo 4PS.QR. Mas (por causa dos triângulos semelhantes QxT, SPN),

$$Qx^2 : QT^2 = PS^2 : SN^2 = PS : SA \text{ (pelo Corolário I, Lema XIV)},$$
$$= 4PS.QR : 4SA.QR.$$

Portanto (pela Proposição IX, Livro V, *Elementos de Euclides*), $QT^2 = 4SA.QR$. Multiplicando essa igualdade por $\frac{SP^2}{QR}$, $\frac{SP^2.QT^2}{QR}$ será igual a $SP^2.4SA$.

Logo (pelos Corolários I e V, Proposição VI), a força centrípeta é inversamente como $SP^2.4SA$; isto é, porque 4SA é dado, inversamente como o quadrado da distância SP. Q.E.I.

COROLÁRIO I – A partir das três últimas proposições, conclui-se que se qualquer corpo P parte de um lugar P, com qualquer velocidade, na direção de uma linha reta qualquer PR, e ao mesmo tempo, é impelido pela ação de uma força centrípeta, que é inversamente proporcional ao quadrado da distância dos lugares ao centro, o corpo se moverá em uma das seções cônicas com seu foco no centro de força; e o inverso é verdadeiro. Pois sendo dados o foco, o ponto de contato, e a posição da tangente, pode-se traçar a seção cônica que terá uma dada curvatura naquele ponto. Mas a curvatura estará determinada se a força centrípeta e a velocidade do corpo forem dadas. E duas órbitas que se tocam não podem ser descritas pela mesma força centrípeta e pela mesma velocidade.

COROLÁRIO II – Se a velocidade com a qual o corpo parte do seu lugar P for tal que em qualquer momento de tempo infinitamente pequeno,

a pequena linha PR puder ser descrita; e a força centrípeta for tal que, no mesmo tempo, mova o mesmo corpo através do espaço QR; o corpo se moverá em uma das seções cônicas, cujo *latus rectum* principal é a quantidade $\frac{QT^2}{QR}$ no seu estado final, quando as pequenas linhas PR e QR são diminuídas *in infinitum*. Nesses Corolários considero o círculo como uma elipse e excetuo o caso em que o corpo desce em direção ao centro em linha reta.

Proposição XIV. Teorema VI

Se vários corpos giram em torno de um centro comum, e a força centrípeta for inversamente como o quadrado da distância dos lugares ao centro: afirmo que os latera recta *principais de suas órbitas são como os quadrados das áreas que os corpos, pelos raios traçados até o centro, descrevem no mesmo tempo.*

Pois (pelo Corolário II, Proposição XIII), o *latus rectum* L é igual à quantidade $\frac{QT^2}{QR}$ em seu estado final, quando os pontos P e Q coincidem. Mas a pequena linha QR, em um dado tempo, é como a força centrípeta geradora; isto é (por suposição), inversamente como SP^2. E, portanto, $\frac{QT^2}{QR}$ é como $QT^2.SP^2$; isto é, o *latus rectum* L é como o quadrado da área QT.SP. Q.E.D.

Corolário – Portanto, a área total da elipse e o retângulo sob os eixos, que é proporcional a ela, é como o produto da raiz quadrada do *latus rectum* e o tempo periódico. Pois a área total é como a área QT.SP, descrita em um dado tempo, multiplicada pelo tempo periódico.

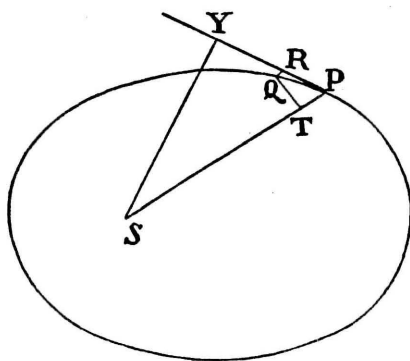
PROPOSIÇÃO XV. TEOREMA VII

O mesmo sendo suposto, afirmo que os tempos periódicos em elipses são como a potência 3/2 (in ratione sesquiplicata) *dos seus eixos maiores.*

Pois, o eixo menor é uma média proporcional entre o eixo maior e o *latus rectum*; e, portanto, o produto dos eixos é igual ao produto da raiz quadrada do *latus rectum* e a potência 3/2 do eixo maior. Mas o produto dos eixos (pelo Corolário da Proposição XIV) varia como o produto da raiz quadrada do *latus rectum* pelo tempo periódico. Divida ambos os lados pela raiz quadrada do *latus rectum* e segue que a potência 3/2 do eixo maior varia como o tempo periódico. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, os tempos periódicos em elipses são os mesmos que em círculos cujos diâmetros são iguais aos eixos maiores das elipses.

PROPOSIÇÃO XVI. TEOREMA VIII

Supondo as mesmas coisas e traçando linhas retas até os corpos, linhas essas que devem tocar as órbitas, e fazendo-se incidir perpendiculares sobre aquelas tangentes a partir de um foco comum: afirmo que as velocidades dos corpos variam inversamente como as perpendiculares e diretamente como as raízes quadradas dos latera recta *principais.*

A partir do foco S trace SY perpendicularmente à tangente PR, e a velocidade do corpo varia inversamente como a raiz quadrada da quantidade $\frac{SY^2}{L}$. Pois essa velocidade é como o arco infinitamente pequeno PQ des-

crito em um dado momento de tempo, isto é (pelo Lema VII), como a tangente PR; isto é (por causa da proporção PR : QT = SP : SY), como $\frac{SP.QT}{SY}$;

ou inversamente como SY e diretamente como SP.QT; mas SP.QT é como a área descrita no tempo dado, isto é (pela Proposição XIV), como a raiz quadrada do *latus rectum*. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Os *latera recta* principais variam como os quadrados das perpendiculares e os quadrados das velocidades.

COROLÁRIO II – As velocidades dos corpos, em suas distâncias máxima e mínima do foco comum, são inversamente como as distâncias e diretamente como a raiz quadrada dos *latera recta* principais. Pois aquelas perpendiculares são agora as distâncias.

COROLÁRIO III – E, portanto, a velocidade em uma seção cônica, na sua distância máxima ou mínima do foco, está para a velocidade em um círculo, à mesma distância do centro, como a raiz quadrada do *latus rectum* principal está para o dobro daquela distância.

COROLÁRIO IV – As velocidades dos corpos que giram em elipses, em suas distâncias médias[1] do foco comum, são as mesmas dos corpos que giram em círculos nas mesmas distâncias; isto é (pelo Corolário VI, Proposição IV), inversamente como a raiz quadrada das distâncias. Pois, as perpendiculares são agora os semi-eixos menores, e estes são como médias proporcionais entre as distâncias e os *latera recta*. Multipliquemos o inverso desta razão [dos semi-eixos menores] pela raiz quadrada da razão direta dos *latera recta*, e teremos a raiz quadrada da razão inversa das distâncias.

COROLÁRIO V – Na mesma figura, ou mesmo em figuras diferentes, cujos *latera recta* principais são iguais, a velocidade de um corpo é inversamente como a perpendicular incidente, a partir do foco, sobre a tangente.

COROLÁRIO VI – Em uma parábola, a velocidade de um corpo é inversamente como a raiz quadrada da razão da distância do corpo ao foco da figura; essa velocidade varia mais do que essa razão em uma elipse, e menos em uma hipérbole. Pois (pelo Corolário II, Lema XIV) a perpendicular incidente a partir do foco sobre a tangente de uma parábola é como a raiz quadrada da razão da distância. Na hipérbole a perpendicular é menos variável, na elipse, mais.

COROLÁRIO VII – Em uma parábola, a velocidade de um corpo, a qualquer distância do foco, está para a velocidade de um corpo que gira em um círculo, à mesma distância do centro, como a raiz quadrada da razão do

1. Ver nota 18 do Apêndice.

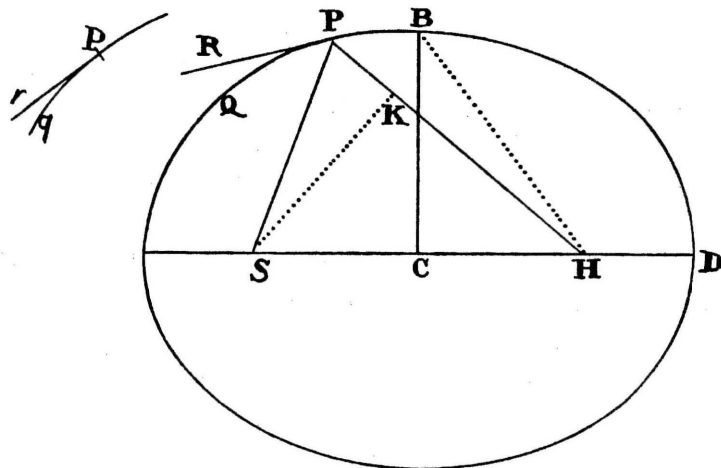
número dois para um; na elipse, ela é menor do que essa razão, na hipérbole é maior. Pois (pelo Corolário II dessa Proposição) a velocidade no vértice de uma parábola está nessa razão e (pelo Corolário VI dessa Proposição e Proposição IV), a mesma proporção é válida em todas distâncias. E, portanto, também, em uma parábola, a velocidade é igual em todos os lugares à velocidade de um corpo girando em um círculo à meia distância; na elipse é menor e na hipérbole é maior.

COROLÁRIO VIII – A velocidade de um corpo que gira em uma seção cônica qualquer está para a velocidade de um corpo que gira em um círculo, na distância de metade do *latus rectum* principal da seção, como essa distância está para a perpendicular incidente, a partir do foco, sobre a tangente da seção. Isto emerge do Corolário V.

COROLÁRIO IX – Portanto, uma vez que (pelo Corolário VI, Proposição IV) a velocidade de um corpo que gira nesse círculo está para a velocidade de um outro corpo que gira em outro círculo qualquer, inversamente como a raiz quadrada das distâncias; portanto, da mesma forma, a velocidade de um corpo que gira em uma seção cônica estará para a velocidade de um corpo que gira em um círculo à mesma distância, como uma média proporcional entre aquela distância comum e a metade do *latus rectum* principal da seção, está para a perpendicular incidente, a partir do foco, comum sobre a tangente da seção.

PROPOSIÇÃO XVII. PROBLEMA IX

Supondo que a força centrípeta seja inversamente proporcional aos quadrados das distâncias dos lugares ao centro, e que o valor absoluto dessa força seja conhecido; pede-se determinar a linha que um corpo descreverá, partindo de um dado lugar, com uma dada velocidade, na direção de uma dada linha reta.

Seja a força centrípeta que tende para o ponto S tal que faça o corpo *p* girar em uma dada órbita *pq*; e suponha que a velocidade deste corpo no lugar *p* seja conhecida. Então, a partir do lugar P, suponha que o corpo P parta com uma dada velocidade na direção da linha reta PR, mas em virtude da força centrípeta, o corpo será imediatamente desviado daquela linha reta para a seção cônica PQ. A linha reta PR tocará, portanto, a seção cônica em P. Suponha, da mesma forma, que a linha reta *pr* toque a órbita *pq* em *p*; e se a partir de S, você conceber perpendiculares incidindo naquelas tangentes, o *latus rectum* principal da seção cônica (pelo Corolário I, Proposição XVI)

estará para o *latus rectum* principal daquela órbita em uma razão composta pela razão quadrada das perpendiculares e pela razão quadrada das velocidades; e está, portanto, dada. Faça esse *latus rectum* ser representado por L; o foco S da seção cônica é também fornecido. Seja RPH o suplemento do ângulo RPS, e a linha PH, na qual o outro foco H é colocado, é dada em posição. Faça SK incidir perpendicularmente sobre PH, e construa o semi-eixo conjugado BC; feito isto, teremos

$$SP^2 - 2PH.PK + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4(BH^2 - BC^2) =$$
$$(SP + PH)^2 - L(SP + PH) = SP^2 + 2PS.PH + PH^2 - L(SP + PH).$$

Some a ambos os lados

$$2PK.PH - SP^2 - PH^2 + L(SP + PH),$$

e teremos

$$L(SP + PH) = 2PS.PH + 2PK.PH, \text{ ou}$$
$$(SP + PH) : PH = 2(SP + KP) : L.$$

Então, PH é dado tanto em comprimento quanto em posição. Isto é, se a velocidade do corpo em P, for tal que o *latus rectum* L é menor do que 2SP + 2KP, PH estará no mesmo lado da tangente PR com a linha SP; e, portanto, a figura será uma elipse que é conhecida a partir dos focos S, H e do eixo principal SP + PH. Mas se a velocidade do corpo é tão grande que o *latus rectum* L se torne igual a 2SP + 2KP, o comprimento PH será infinito e, portanto, a figura será uma parábola, com seu eixo SH paralelo à linha PK. Mas se o corpo partir do lugar P com uma velocidade ainda maior, o comprimento PH deve ser tomado sobre o outro lado da tangente; e, assim, com tangente passando entre os focos, a figura será uma hipérbole com seu eixo principal igual à diferença das linhas SP e PH. Pois se o corpo, nesses casos,

gira em uma seção cônica encontrada da forma descrita, é demonstrado nas Proposições XI, XII e XIII, que a força centrípeta será inversamente como o quadrado da distância do corpo ao centro de força S; e, portanto, justamente determinamos a linha PQ, que um corpo partindo de um dado lugar P, com uma dada velocidade e na direção da linha reta PR dada em posição, descreveria com tal força. Q.E.F.

COROLÁRIO I – Portanto, se em qualquer seção cônica, forem dados o vértice principal D, o *latus rectum* L e o foco S, o outro foco H é obtido, tomando-se DH para DS assim como o *latus rectum* para a diferença entre o *latus rectum* e 4DS. Porque a proporção

$$SP + PH : PH = 2SP + 2KP : L$$

torna-se, no caso deste Corolário,

$$DS + DH : DH = 4DS : L, \text{ e } DS : DH = 4DS - L : L.$$

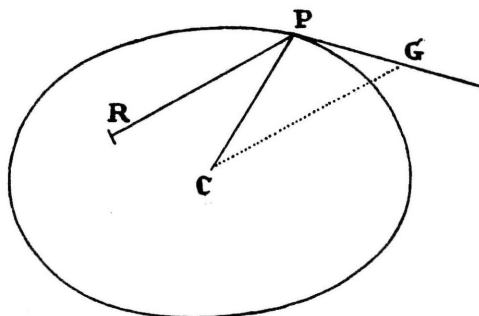
COROLÁRIO II – Por essa razão, se a velocidade de um corpo no vértice principal D é dada, a órbita pode ser imediatamente encontrada; isto é, tomando-se o seu *latus rectum* para o dobro da distância DS, na razão quadrada desta dada velocidade para a velocidade de um corpo que gira em um círculo à distância DS (pelo Corolário III, Proposição XVI) e, então, tomando-se DH para DS assim como o *latus rectum* para a diferença entre o *latus rectum* e 4DS.

COROLÁRIO III – Portanto, da mesma forma, se um corpo move-se em qualquer seção cônica e é forçado a sair de sua órbita por um impulso qualquer, você poderá descobrir a órbita na qual ele posteriormente prosseguirá seu curso. Pois ao compor-se o movimento próprio do corpo com aquele movimento que o impulso sozinho geraria, você terá o movimento com o qual o corpo sairá de um dado lugar de impulso na direção de uma linha reta dada em posição.

COROLÁRIO IV – E se aquele corpo é continuamente perturbado pela ação de alguma força exterior, podemos conhecer seu curso aproximadamente coletando as mudanças que aquela força introduz em alguns pontos, e estimando as mudanças que ele sofrerá nos lugares intermediários a partir da analogia que surge do progresso das séries.

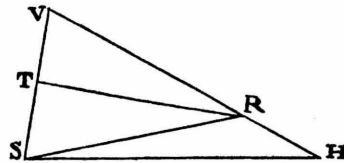
Escólio

Se um corpo P, por meio de uma força centrípeta que tende para qualquer ponto dado R, move-se no perímetro de qualquer seção cônica dada, cujo centro é C; e pede-se a lei da força centrípeta: trace CG paralela-

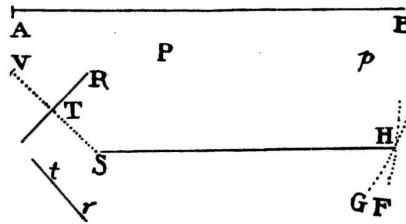
mente ao raio RP, encontrando a tangente PG da órbita em G, e a força solicitada (pelo Corolário I e Escólio, Proposição X, e Corolário III, Proposição VII) será como $\frac{CG^3}{RP^2}$.

» SEÇÃO IV

A obtenção de órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas, a partir do foco dado

LEMA XV

Se a partir dos dois focos S, H, *de qualquer elipse ou hipérbole, traçarmos em direção a qualquer ponto* V *as linhas retas* SV, HV, *das quais uma,* HV, *é igual ao eixo principal da figura, isto é, igual ao eixo no qual os focos estão situados, e a outra,* SV, *for bisseccionada em* T *pela perpendicular* TR *incidente sobre ela; esta perpendicular* TR *tocará em algum lugar a seção cônica; e,* vice versa, *se esta realmente tocá-la,* HV *será igual ao eixo principal da figura.*

Faça a perpendicular TR cortar a linha reta HV, estendida se necessário, em R; e una SR. Porque TS, TV, são iguais, logo, as linhas retas SR, VR, bem como o ângulo TRS, TRV, serão também iguais. Logo, o ponto R estará na seção cônica e a perpendicular TR tocará a mesma; e o contrário. Q.E.D.

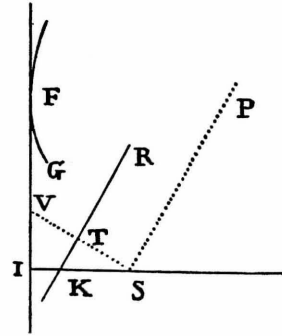
Proposição XVIII. Problema X

Dados um foco e os eixos principais, descrever curvas elípticas e hiperbólicas que deverão passar por pontos dados e tocar linhas retas dadas em posição.

Seja S o foco comum das figuras; AB o comprimento do eixo principal de qualquer cônica; P um ponto pelo qual a cônica deve passar; e TR uma linha reta que esta deve tocar. Em torno do centro P, com raio AB - SP se a órbita for uma elipse, ou AB + SP, se a órbita for uma hipérbole, descreva o círculo HG. Na tangente TR, faça incidir a perpendicular ST e estenda a mesma até V, de maneira que TV seja igual a ST; e em torno de V como um centro, com intervalo AB, descreva o círculo FH. Desta forma, se são dados dois pontos P, *p*, ou duas tangentes TR, *tr*, ou um ponto P e uma tangente TR, podemos descrever dois círculos. Seja H sua interseção comum, e a partir dos focos S, H, descreva a cônica com o eixo dado: afirmo que a questão está resolvida. Pois (porque PH + SP na elipse, PH - SP na hipérbole, são iguais ao eixo), a cônica descrita passará pelo ponto P e (pelo Lema precedente) tocará a linha reta TR. E pelo mesmo argumento, a cônica descrita irá passar pelos dois pontos P, *p*, ou tocará as linhas retas TR, *tr*. Q.E.F.

Proposição XIX. Problema XI

Em torno de um foco dado, descrever uma parábola que deverá passar por pontos dados e tocar linhas retas dadas em posição.

Seja S o foco, P um ponto, e TR uma tangente da curva a ser descrita. Em torno de P como um centro, com o raio PS, descreva o círculo FG. A partir do foco, faça incidir ST perpendicularmente à tangente e estenda a mesma até V, de forma que TV seja igual a ST. Da mesma forma, um outro círculo *fg* deve ser descrito, se um outro ponto *p* for dado; ou um outro ponto *v* deve ser encontrado, se uma outra tangente *tr* for dada; então, trace a

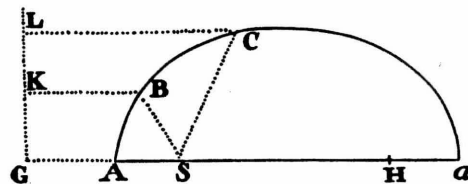
linha IF que deve tocar os dois círculos FG, *fg*, se dois pontos P, *p*, forem dados; ou passar pelos dois pontos V, *v*, se duas tangentes TR, *tr*, forem dadas, ou trocar o círculo FG e passar pelo ponto V, se o ponto P e a tangente TR forem dados. Sobre FI faça incidir a perpendicular SI, e bisseccione a mesma em K; e com o eixo SK e o vértice principal K, descreva uma parábola; afirmo que a questão está resolvida. Pois esta parábola (porque SK é igual a IK, e SP é igual a FP) passará pelo ponto P; e (pelo Corolário III, Lema XIV) como ST é igual a TV, e STR um ângulo reto, tocará a linha reta TR. Q.E.F.

PROPOSIÇÃO XX. PROBLEMA XII

Em torno de um foco dado, descrever qualquer cônica dada que passe por pontos dados e toque linhas retas dadas em posição

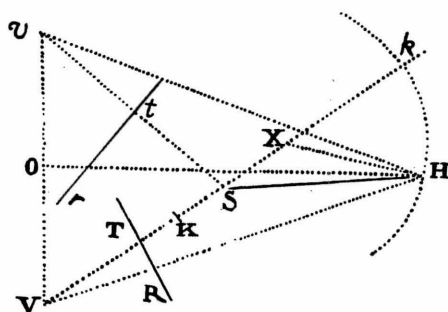
CASO 1 – Em torno do foco S, pede-se descrever uma cônica ABC, que passe por dois pontos B, C. Sendo a cônica dada em natureza, a razão do eixo principal para a distância dos focos será dada. Nessa razão, tome KB para BS, e LC para CS. Em torno dos centros B, C, com intervalo BK, CL, descreva dois círculos; e sobre a linha reta KL, que toca os mesmos em K e L, faça incidir a perpendicular SG, que corta a cônica em A e *a*, de maneira que GA esteja para AS e G*a* para *a*S como KB para BS; e com o eixo A*a* e vértices A, *a*, descreva uma cônica: afirmo que a questão está resolvida. Pois sendo H o outro foco da figura descrita, e levando em conta que

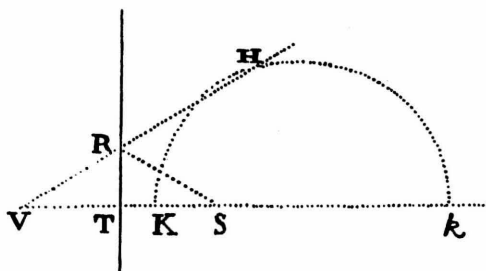
$GA : AS = Ga : aS$, teremos

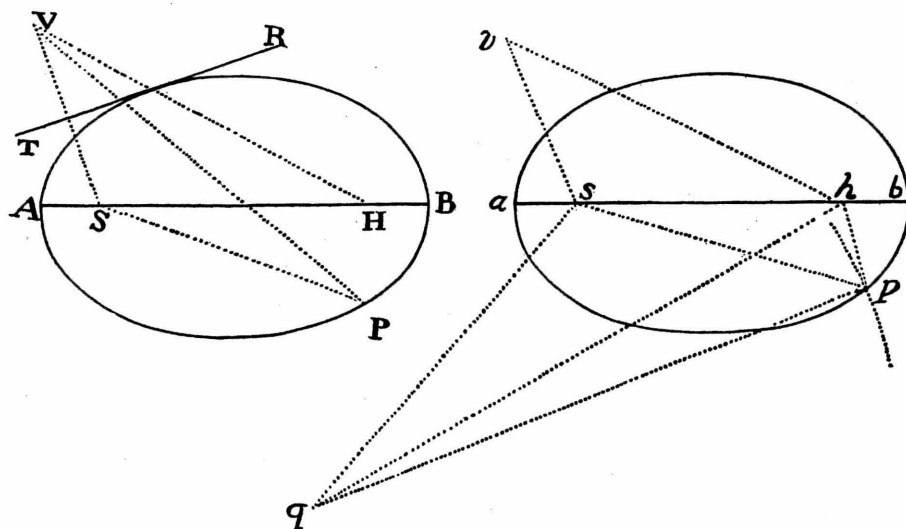
$Ga - GA : aS - AS = GA : AS$, ou

$Aa : SH = GA : AS$,

e, portanto, GA e AS estão na razão que o eixo principal da figura a ser descrita tem para com a distância de seus focos e, assim, a figura descrita é da mesma natureza que a figura que deveria ser descrita. E, uma vez que KB

para BS, e LC para CS, estão na mesma razão, esta figura passará pelos pontos B, C, como é conhecido a partir das seções cônicas.

CASO 2 – Em torno do foco S, pede-se descrever uma cônica que deve tocar em algum ponto duas linhas retas TR, *tr*. A partir do foco, sobre aquelas tangentes, faça as perpendiculares ST, S*t*, que estendem-se até V, *v* de forma que TV, *tv*, sejam iguais a TS, *t*S. Bisseccione V*v* em O, e trace a perpendicular indefinida OH e corte a linha reta VS, infinitamente estendida em K e *k*, de forma que VK esteja para KS, e V*k* para *k*S, como o eixo principal da cônica a ser descrita está para a distância entre seus focos. Em torno do diâmetro K*k* descreva um círculo cortando OH em H, e com S, H, e o eixo principal

igual a VH, descreva uma cônica: afirmo que a questão está resolvida. Pois, bisseccionando K*k* em X e unindo HX, HS, HV, H*v*, porque VK está para KS como V*k* para *k*S; e, por composição, como VK + V*k* para KS + *k*S; e por subtração, como V*k* - VK para *k*S - KS, isto é, como 2VX para 2KX, e 2KX para 2SX, e, portanto, como VX para HX e HX para SX, os triângulos VXH, HXS serão semelhantes; assim, VH está para SH como VX para XH; e, portanto, como VK para KS. Por isso, VH, o eixo principal da cônica descrita, tem a mesma razão para SH, a distância dos focos, que o eixo principal da cônica que devia ser descrita tem para a distância de seus focos; e é, portanto, de mesma natureza. E como VH, *v*H, são iguais ao eixo principal, e VS, *v*S são perpendicularmente bisseccionadas pelas linhas retas TR, *Tr*, é evidente (pelo Lema XV) que aquelas linhas retas tocam a cônica descrita. Q.E.F.

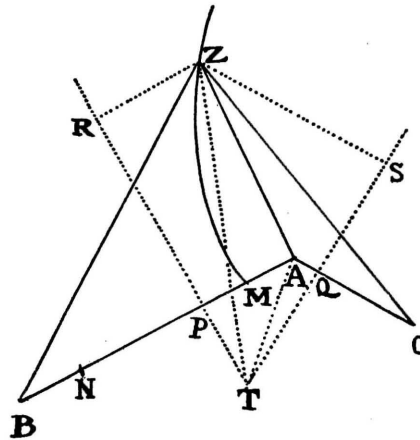
CASO 3 – Em torno do foco S, pede-se descrever uma cônica que toque uma linha reta TR em um ponto dado R. Sobre a linha TR faça incidir a perpendicular ST, que estende-se até V, de forma que TV seja igual a ST; una VR e corte a linha reta VS indefinidamente estendida em K e *k*, de forma que VK esteja para SK e V*k* para S*k*, como o eixo principal da elipse a ser descrita está para a distância de seus focos; e em torno do diâmetro K*k*, descrevendo um círculo, corte a linha reta VR estendida em H; então, com os focos S, H,

e o eixo principal igual a VH, descreva uma cônica: afirmo que a questão está resolvida. Pois VH : SH = VK : SK, e, portanto, como o eixo principal da cônica que devia ser descrita está para a distância de seus focos (como se constata pelo que foi demonstrado no Caso 2); e, portanto, a cônica descrita é da mesma natureza que aquela que devia ser descrita; mas é certo, a partir das propriedades das seções cônicas, que a linha reta TR, pela qual o ângulo VRS é bisseccionado, toca a cônica no ponto R. Q.E.F.

CASO 4 – Em torno do foco S, pede-se descrever uma cônica APB que deve tocar uma linha reta TR e passar por qualquer ponto dado P, que não o de tangência, e deve ser semelhante à figura *apb* descrita com o eixo principal *ab* e os focos *s, h.* Sobre a tangente TR, faça incidir a perpendicular ST,

que se estende até V, de forma que TV seja igual a ST; e fazendo os ângulos *hsq, shq* iguais aos ângulos VSP, SVP, em torno de *q* como um centro, e com um raio que deve estar para *ab* como SP para VS, descreva um círculo cortando a figura *apb* em *p.* Una *sp,* e trace SH de forma que esteja para *sh* como SP está para *sp,* e o ângulo PSH seja igual ao ângulo *psh* e o ângulo VSH igual

ao ângulo *psq*. Então, com os focos S, H, e o eixo principal AB igual à distância VH, descreva uma seção cônica: afirmo que a questão está resolvida. Pois, se *sv* é traçado de forma que esteja para *sp* como *sh* está para *sq*, e seja o ângulo *vsp* igual ao ângulo *hsq*, e o ângulo *vsh* igual ao ângulo *psq*, então os triângulos *svh*, *spq* serão semelhantes e, portanto, *vh* estará para *pq* como *sh* para *sq*; isto é (por causa da semelhança dos triângulos VSP, *hsq*), como VS para SP, ou como *ab* para *pq*. Por isso, *vh* e *ab* são iguais. Mas, por causa da semelhança dos triângulos VSH, *vsh*, VH está para SH como *vh* para *sh*; isto é, o eixo da cônica agora descrita está para a distância de seus focos como o eixo *ab* para a distância de seus focos *sh*; e, portanto, a figura agora descrita é semelhante à figura *aph*. Mas, porque o triângulo PSH é semelhante ao triângulo *psh*, esta figura passa pelo ponto P e, porque VH é igual ao seu eixo e VS é perpendicularmente bisseccionado pela linha reta TR, a referida figura toca a linha reta TR. Q.E.F.

Lema XVI

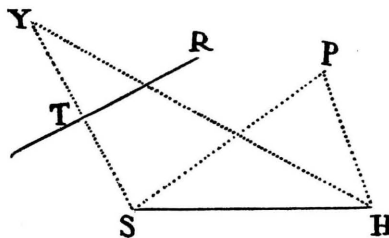
A partir de três pontos dados, traçar três linhas retas até um quarto ponto que não é dado, cujas diferenças são ou dadas ou iguais a zero.

Caso 1 – Sejam dados os pontos A, B, C, e seja Z o quarto ponto que devemos encontrar; por causa da diferença dada das linhas AZ, BZ, o *locus* do ponto Z será uma hipérbole cujos focos são A e B, e cujo eixo principal é a diferença dada. Seja MN o eixo. Tomando-se PM para MA como MN para AB, trace PR perpendicularmente a AB, e faça incidir ZR perpendicularmente a PR; então, pela natureza da hipérbole, ZR : AZ = MN : AB. E por argumento semelhante, o *locus* do ponto Z será uma outra hipérbole, cujos focos são A, C, e cujo eixo principal é a diferença entre AZ e CZ; e sobre AC pode ser traçada uma perpendicular QS, sobre a qual se faz incidir, a partir de qualquer ponto Z desta hipérbole, uma perpendicular ZS, que deverá estar para AZ como a diferença entre AZ e CZ está para AC. Por isso, as razões de ZR e ZS para AZ são dadas e, conseqüentemente, a razão de ZR para ZS; e, portanto, se as linhas retas RP, SQ encontram-se em T, e TZ e TA são traçadas, a figura TRZS será dada em natureza e a linha reta TZ, na qual o ponto Z está localizado em algum lugar, será dada em posição. Estará dada também a linha reta TA, e o ângulo ATZ; e como as razões de AZ e TZ para ZS são dadas, a razão de uma para a outra é também dada; e, assim, também será dado o triângulo ATZ, cujo vértice é o ponto Z. Q.E.I.

CASO 2 – Se duas das três linhas, por exemplo, AZ e BZ, são iguais, trace a linha reta TZ de forma a bisseccionar a linha reta AB; encontre, então, o triângulo ATZ como acima. Q.E.I.

CASO 3 – Se todas as três são iguais, o ponto Z estará localizado no centro de um círculo que passa através dos pontos A, B, C. Q.E.I.

Este problemático Lema é também resolvido no *Book of Tactions* de *Apollonius*, restaurado por *Vieta*.

PROPOSIÇÃO XXI. PROBLEMA XIII

Em torno de um foco dado, descrever uma cônica que deve passar por pontos dados e tocar linhas retas dadas em posição.

Dados o foco S, o ponto P e a tangente TR, suponha que o outro foco H deva ser encontrado. Sobre a tangente, faça incidir a perpendicular ST, que se estende até Y, de forma que TY seja igual a ST, e YH igual ao eixo principal. Una SP, HP, e SP será a diferença entre HP e o eixo principal. Desse modo, se mais tangentes TR ou mais pontos P são dados, sempre determinaremos tantas linhas YH, ou PH, traçadas a partir dos referidos pon-

tos Y ou P, para o foco H, que serão iguais aos eixos ou diferirão deles por comprimentos dados SP; e, portanto, que serão iguais entre si ou terão diferenças dadas; a partir disso (pelo Lema anterior), aquele outro foco H é dado. Mas existindo os focos e o comprimento do eixo (que é YH, ou se a cônica for uma elipse, PH + SP; ou PH - SP, se ela for uma hipérbole), a cônica é dada. Q.E.I.

Escólio

Quando a cônica é uma hipérbole, não incluo sua hipérbole conjugada sob o nome desta cônica. Pois um corpo em movimento contínuo nunca pode passar de uma hipérbole para sua hipérbole conjugada.

O caso é mais prontamente resolvido quando são dados três pontos. Sejam B, C, D esses pontos dados. Una BC, CD, e estenda-os até E, F, de forma que EB esteja para EC como SB para SC; e FC para FD como SC para SD. Sobre EF traçada e estendida, faça incidir as perpendiculares SG, BH, e em GS, estendida indefinidamente, tome GA para AS, e G*a* para *a*S, como HB para BS; então, A será o vértice e A*a* ao eixo principal da cônica, a qual, dependendo se GA é maior, igual ou menor do que AS, será uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole; o ponto *a*, no primeiro caso, caindo sobre o mesmo lado da linha GF que o ponto A; no segundo, seguindo para uma distância infinita; no terceiro, caindo sobre o outro lado da linha GF. Pois, se as perpendiculares CI, DK incidirem sobre GF, IC estará para HB como EC para EB; isto é, como SC para SB; e, por permutação, IC para SC como HB

para SB, ou como GA para SA. E, pelo mesmo argumento, podemos provar que KD está para SD na mesma razão. Por isso, os pontos B, C, D situam-se em uma seção cônica descrita em torno do foco S de tal forma que as linhas retas traçadas a partir do foco S até os vários pontos da seção, e as perpendiculares incidentes a partir dos mesmos pontos sobre a linha reta GF, estão naquela razão dada.

O grande geômetra M. *de la Hire* resolveu este problema de maneira muito semelhante em sua obra *Cônicas*, Proposição XXV, Livro VIII.

» SEÇÃO V

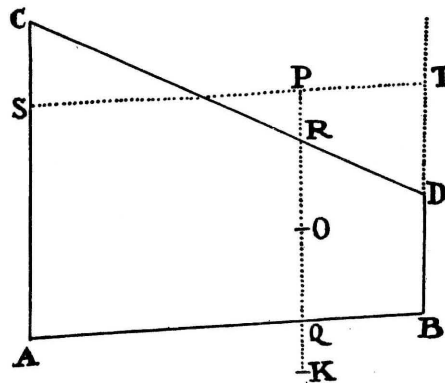
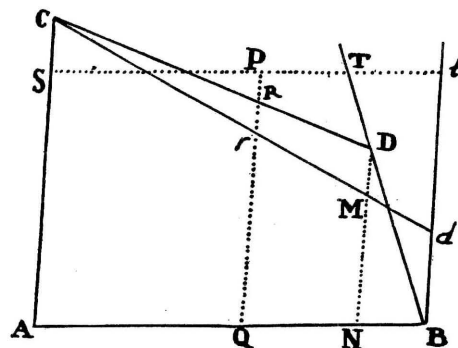
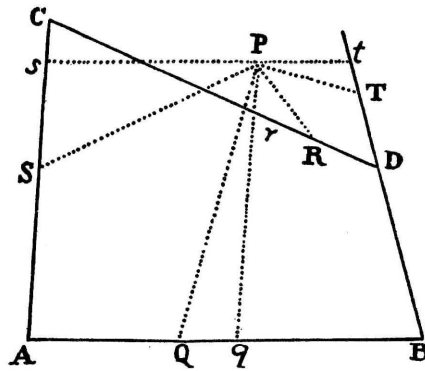
Como as órbitas devem ser encontradas quando nem um dos focos é dado

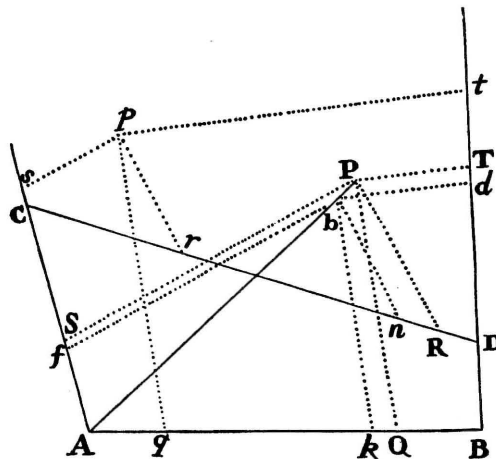
LEMA XVII

Se a partir de qualquer ponto P de uma dada seção cônica, em direção aos quatro lados estendidos AB, CD, AC, DB *de qualquer trapézio*[1] ABDC *inscrito naquela seção, forem traçadas linhas retas* PQ, PR, PS, PT, *em ângulos dados, uma linha para cada lado; o retângulo* PQ.PR *daquelas sobre os lados opostos* AB, CD, *estará numa razão para o retângulo* PS.PT *daquelas sobre os outros dois lados opostos* AC, BD.

CASO 1 – Suponhamos, primeiro, que as linhas traçadas para um par de lados opostos são paralelas a qualquer um dos outros lados: como PQ e PR para o lado AC, e PS e PT para o lado AB. E ainda, que um par de lados opostos, como AC e BD, são paralelos entre si; então, a linha reta que bissecciona aqueles lados paralelos será um dos diâmetros da seção cônica e igualmente bisseccionará RQ. Seja O o ponto no qual RQ é bisseccionada, e PO será uma ordenada para aquele diâmetro. Estenda PO até K, de modo que OK seja igual a PO, e OK será uma ordenada do outro lado daquele

1. Ver nota 19 do Apêndice.

diâmetro. Uma vez, portanto, que os pontos A, B, P e K estão localizados na seção cônica, e PK corta AB num ângulo dado, o retângulo PQ.QK (pelas Proposições XVII, XIX, XXI e XXIII, Livro III, *Cônicas* de *Apollonius*) estará para o retângulo AQ.QB numa dada razão. Mas QK e PR são iguais, por serem as diferenças das retas iguais OK e OP, OQ e OR; daí, os retângulos PQ.QK e PQ.PR são iguais; e, assim, o retângulo PQ.PR está para o retângulo AQ.QB, isto é, para o retângulo PS.PT, numa dada razão. O.E.D.

CASO 2 – Suponhamos a seguir que os lados opostos AC e BD do trapézio não são paralelos. Trace B*d* paralelamente a AC, encontrando tanto a linha reta ST em *t*, como a seção cônica em *d*. Una C*d* cortando PQ em *r* e trace DM paralelamente a PQ, cortando C*d* em M e AB em N. Então (devido à semelhança dos triângulos BT*t*, DBN) B*t* ou PQ : T*t* = DN : NB. E assim, R*r* : AQ ou PS = DM : AN. Portanto, multiplicando os antecedentes, pelos antecedentes e os conseqüentes pelos conseqüentes, como o retângulo PQ.R*r* está para o retângulo PS.T*t*, da mesma forma o retângulo DN.DM estará para o retângulo NA.NB; e (pelo caso 1), também o retângulo PQ.P*r* está para o retângulo PS.P*t* e, por divisão, o retângulo PQ.PR para o retângulo PS.PT. Q.E.D

CASO 3 – Suponhamos, finalmente, que as quatro linhas PQ, PR, PS, PT não sejam paralelas aos lados AC, AB, mas de alguma forma inclinadas em direção a eles. No seu lugar, trace P*q*, P*r*, paralelamente a AC; e P*s*, P*t* paralelamente a AB; e como os triângulos PQ*q*, PR*r*, PS*s*, PT*t* são dados, as razões de PQ para P*q*, PR para P*r*, PS para P*s*, PT para P*t*, também serão dadas; e, portanto, as razões compostas PQ.PR para P*q*.P*r* e PS.PT para P*s*.P*t*, são dadas. Mas, a partir do que demonstramos antes, a razão de P*q*.P*r* para P*s*.P*t* é dada; e, portanto, também a razão de PQ.PR para PS.PT. Q.E.D.

LEMA XVIII

Supondo as mesmas coisas, se o retângulo PQ.PR *das linhas traçadas para os dois lados opostos do trapézio estiver numa dada razão para o retângulo* PS.PT *daquelas traçadas para outros dois lados, o ponto* P, *a partir de onde aquelas linhas são traçadas, estará localizado em uma seção cônica descrita ao redor do trapézio.*

Imagine uma seção cônica sendo descrita, passando através dos pontos A, B, C, D e qualquer um do número infinito de pontos P, como, por exemplo, *p*: afirmo que o ponto P estará sempre localizado nesta seção. Se você nega isso, una AP, cortando essa seção cônica em algum outro lugar, se possível que não em P, em *b*, por exemplo. Portanto, se a partir daqueles pontos *p* e *b*, em ângulos dados para os lados do trapézio, traçarmos as linhas retas *pq, pr, ps, pt* e *bk, bn, bf, bd,* deveremos ter *bk.bn* para *bf.bd*, assim como (pelo Lema XVII) *pq.pr* está para *ps.pt*; e, assim, (por suposição), PQ.PR para PS.PT. E devido à semelhança dos trapézios *bkAf*, PQAS, *bk* está para *bf*, como PQ para PS. Por essa razão, dividindo os termos da proporção precedente pelos termos correspondentes desta, deveremos ter *bn* para *bd* como PR para PT. E, portanto, os trapézios equiangulares D*nbd*, DRPT são semelhantes e, conseqüentemente, suas diagonais D*b*, DP realmente coincidem. Por essa razão, *b* cai na interseção das linhas retas AP, DP, e, conseqüentemente, coincide como o ponto P. E, portanto, o ponto P, seja onde for tomado, cai na seção cônica designada. Q.E.D.

COROLÁRIO – Portanto, se três linhas retas PQ, PR e PS, são traçadas a partir de um ponto comum P, em ângulos dados, para outras tantas linhas retas dadas em posição, AB, CD, AC, uma respectivamente para a outra, e o retângulo PQ.PR, sob quaisquer duas das linhas traçadas, está para o quadrado da terceira, PS, numa dada razão; o ponto P, a partir do qual as linhas retas foram traçadas, estará localizado numa seção cônica que toca as linhas AB, CD em A e C; e vice-versa. Com a posição das três linhas retas AB, CD, AC permanecendo a mesma, faça a linha BD aproximar-se e coincidir com a linha AC; então, faça a linha PT igualmente vir a coincidir com a linha PS; e o retângulo PS.PT tornar-se-á PS^2, e as linhas retas AB, CD, que antes efetivamente cortavam a curva nos pontos A e B, C e D, não podem mais cortá-la, mas somente tocar a curva naqueles pontos coincidentes.

Escólio

Nesse Lema, a denominação de seção cônica deve ser *entendido* como num sentido amplo, abrangendo tanto a seção retilínea através do vértice do cone, como a circular paralela à base. Pois, se o ponto *p* estiver na linha reta pela qual os pontos A e D, ou C e B, são ligados, a seção cônica será transformada em duas linhas retas, uma das quais é aquela sobre a qual o ponto *p* cai, e a outra é uma linha reta que une os outros dois dos quatro pontos. Se a soma dos dois ângulos opostos do trapézio for igual a dois ân-

gulos retos, e se as quatro linhas PQ, PR, PS, PT forem traçadas para os lados daquele em ângulos retos, ou quaisquer outros ângulos iguais, e o retângulo PQ.PR sob duas das linhas traçadas, PQ e PR, for igual ao retângulo PS.PT sob as duas outras PS e PT, a seção cônica tornar-se-á um círculo. E o mesmo acontecerá se as quatro linhas forem traçadas em quaisquer ângulos, e o retângulo PQ.PR, sob um par, das linhas traçadas, estiver para o retângulo PS.PT sob o outro par como o retângulo sob os senos dos ângulos S, T, nos quais as duas últimas linhas PS, PT foram traçadas, está para o retângulo sob os senos dos ângulos Q, R, no qual as duas, PQ, PR foram traçadas. Em todos os outros casos, o *locus* do ponto P será uma das três figuras que levam comumente o nome de seções cônicas. Mas podemos substituir o trapézio ABCD por uma figura quadrilateral, cujos dois lados opostos cruzam-se um ao outro como diagonais. E podemos supor que um ou dois dos quatro pontos A, B, C, D, foram levados a uma distância infinita, com o que tornar-se-ão paralelos os lados da figura que convergem para aqueles pontos; e nesse caso, a seção cônica passará através dos outros pontos, e continuará da mesma maneira como as paralelas *in infinitum.*

Lema XIX

Encontrar um ponto P tal que, se quatro linhas PQ, PR, PS, PT *são respectivamente traçadas a partir dele, em ângulos dados, para tantas outras linhas retas dadas em posição,* AB, CD, AC, BD, *o retângulo* PQ.PR, *sob quaisquer duas linhas traçadas, esteja numa dada razão para o outro retângulo* PS.PT, *sob as outras duas.*

Suponha dadas em posição nos pontos A, B, C, D, as linhas AB, CD, para as quais são traçadas as duas linhas retas PQ, PR, contendo um dos retângulos. A partir de um daqueles pontos, como, por exemplo, A, trace qualquer linha reta AH, na qual você encontraria o ponto P. Faça-a cortar as linhas opostas BD, CD, em H e I; e, como todos os ângulos da figura são dados, a razão de PQ para PA, e de PA para PS, e, portanto, de PQ para PS, também será dada. Tomando essa razão como um divisor para a razão dada de PQ.PR para PS.PT, obtemos a razão de PR para PT; e multiplicando as razões dadas de PI para PR e de PT para PH, a razão de PI para PH será conhecida, e com ela o ponto P. Q.E.I.

Corolário I – Portanto, também uma tangente pode ser traçada para qualquer ponto D do *locus* de todos os pontos P. Pois a corda PD, onde os pontos P e D se encontram, isto é, onde AH é traçada através do ponto D, torna-se uma tangente. Nesse caso, a razão final das linhas evanescentes IP e PH será obtida como explicado acima. Assim, trace CF paralelamente a AD, encontrando BD em F, e corte-a em E na mesma razão final, e então DE será a tangente; pois CF e a evanescente IH são paralelas, igualmente cortadas em E e P.

Corolário II – Portanto, também o *locus* de todos os pontos P pode ser determinado. Através de qualquer dos pontos A, B, C, D, como A, trace AE tocando o *locus*, e através de qualquer outro ponto B, paralelamente à tangente, trace BF encontrando o *locus* em F; e encontre o ponto F por este Lema. Bisseccione BF em G e, traçando a linha indefinida AG, essa será a posição do diâmetro para o qual BG e FG são ordenadas. Faça esta AG encontrar o *locus* em H, e AH será seu diâmetro, ou *latus transversum*, para o qual o *latus rectum* estará como BG^2 para AG.GH. Se AG não encontra o *locus* em nenhum lugar, sendo a linha AH infinita, o *locus* será uma parábola; e seu *latus rectum*, correspondente ao diâmetro AG, será $\frac{BG^2}{AG}$. Mas se ela realmente encontrá-lo em algum lugar, o *locus* será uma hipérbole, quando os

pontos A e H estiverem localizados sobre o mesmo lado que o ponto G; e uma elipse, se o ponto G cair entre os pontos A e H; a menos que o ângulo AGB seja reto, e, ao mesmo tempo, BG^2 seja igual ao retângulo GA.GH, caso em que o *locus* será um círculo.

E assim, neste Corolário, obtivemos uma solução daquele famoso Problema dos antigos, referente às quatro linhas, iniciado por *Euclides* e desenvolvido por *Apollonius*; e este não é um cálculo analítico, mas uma composição geométrica, tal como requerido pelos antigos.

Lema XX

Se os dois pontos angulares opostos A *e* P *de qualquer paralelogramo* ASPQ *tocam qualquer seção cônica nos pontos* A *e* P*; e os lados* AQ, AS *de um daqueles ângulos, prolongados indefinidamente, encontram a mesma seção cônica em* B *e* C*; e a partir dos pontos de encontro* B *e* C *até um quinto ponto qualquer* D *da seção cônica, duas linhas retas* BD, CD *são traçadas encontrando os outros dois lados* PS, PQ *do paralelogramo, estendidos indefinidamente, em* T *e* R*; as partes* PR *e* PT, *destacadas dos lados, sempre estarão uma para a outra em uma razão dada. E, inversamente, se aquelas partes destacadas estão uma para a outra em uma razão dada, o* locus *do ponto* D *será uma seção cônica que passa pelos quatro pontos* A, B, C, P.

Caso 1 – Una BP, CP, e a partir do ponto D trace as duas linhas retas DG, DE, das quais a primeira, DG, deve ser paralela a AB, e encontre PB, PQ, CA em H, I, G; e a outra, DE, deve ser paralela a AC, e encontrar PC, PS, AB

em F, K, E; e (pelo Lema XVII) o retângulo DE.DF estará para o retângulo DG.DH em uma razão dada. Mas PQ está para DE (ou IQ) como PB para HB, e, conseqüentemente, como PT para DH; e, por permutação, PQ está para PT como DE para DH. Da mesma forma, PR está para DF como RC para DC, e, portanto, como PS (ou IG) para DG; e, por permutação, PR para PS como DF para DG; e, pela composição daquelas razões, o retângulo PQ.PR estará para o retângulo PS.PT como o retângulo DE.DF está para o retângulo DG.DH, e, conseqüentemente, em uma razão dada. Mas PQ e PS são dados e, portanto, a razão de PR para PT é dada. Q.E.D.

CASO 2 – Mas, se for suposto que PR e PT estão em uma razão dada um para o outro, então, por um raciocínio semelhante, seguirá que o retângulo DE.DF está para o retângulo DG.DH em uma razão dada; tal que o ponto D (pelo Lema XVIII) estará numa seção cônica que passa pelos pontos A, B, C, P, como seu *locus*. Q.E.D.

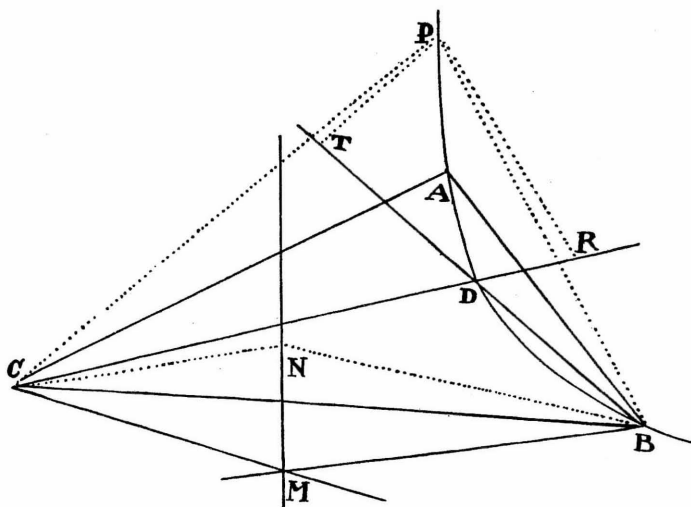
COROLÁRIO I – Assim, se traçarmos BC cortando PQ em *r*, e, em PT, tomarmos P*t* para P*r* na mesma razão que PT tem para PR, então B*t* tocará a seção cônica no ponto B. Pois suponha que o ponto D se una ao ponto B, de modo que, anulando-se a corda BD, BT tornar-se-ia uma tangente; e CD e BT coincidirão com CB e B*t*.

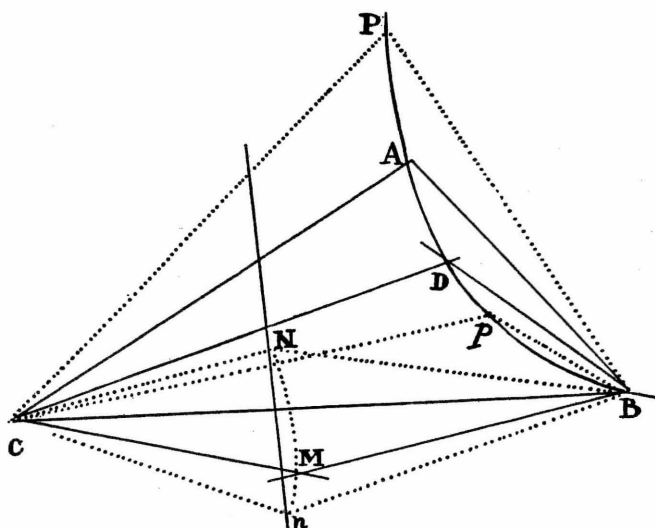
COROLÁRIO II – E, *vice versa*, se B*t* for uma tangente, e as linhas BD, CD encontram-se em qualquer ponto D de uma seção cônica, PR estará para PT como P*r* para P*t*. E, ao contrário, se PR está para PT como P*r* para P*t*, então BD e CD encontrar-se-ão em algum ponto D de uma seção cônica.

COROLÁRIO III – Uma seção cônica não pode cortar outra seção cônica em mais do que quatro pontos. Pois, se tal é possível, faça duas seções cô-

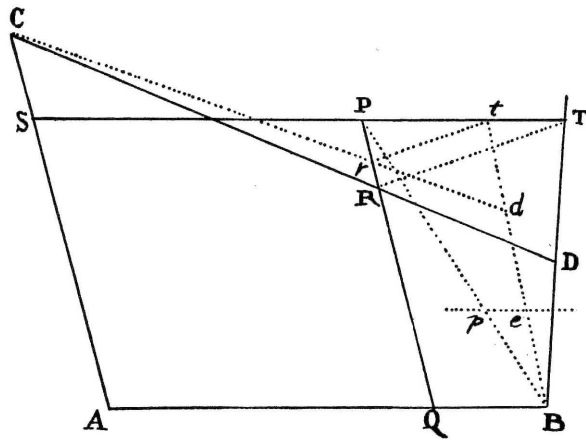
nicas passarem pelos cinco pontos A, B, C, P, O; e faça a linha reta BD cortálas nos pontos D, *d*, e a linha reta C*d* cortar a linha reta PQ em *q*. Portanto, PR está para PT como P*q* para PT: assim, PR e P*q* são iguais, o que contraria a suposição.

Lema XXI

Se duas linhas retas móveis e indefinidas BM, CM, *traçadas através dos pontos dados* B, C, *como pólos, fizeram seu ponto de encontro* M *descrever uma terceira linha reta* MN, *dada em posição; e outras duas linhas retas indefinidas* BD, CD *forem traçadas, formando com as duas primeiras, naqueles pontos dados* B, C, *ângulos dados* MBD, MCD*; afirmo que aquelas duas linhas retas* BD, CD *descreverão, pelo seu ponto de encontro* D, *uma seção cônica que passa pelos pontos* B, C. *E, inversamente, se as linhas retas* BD, CD *fizerem seu ponto de encontro* D *descrever uma seção cônica que passa pelos pontos dados* B, C, A, *e o ângulo* DBM *for sempre igual ao ângulo dado* ABC, *bem como o ângulo* DCM *sempre igual ao ângulo dado* ACB, *o ponto* M *estará em uma linha reta dada em posição, como seu* locus.

Seja dado um ponto N na linha reta MN, e quando o ponto móvel M cai sobre o ponto imóvel N, faça o ponto móvel D cair sobre um ponto imóvel P. Una CN, BN, CP, BP e, a partir do ponto P, trace as linhas retas PT, PR, encontrando BD, CD em T e R, fazendo o ângulo BPT igual ao ângulo dado BNM, e o ângulo CPR igual ao ângulo dado CNM. Por essa razão, uma vez

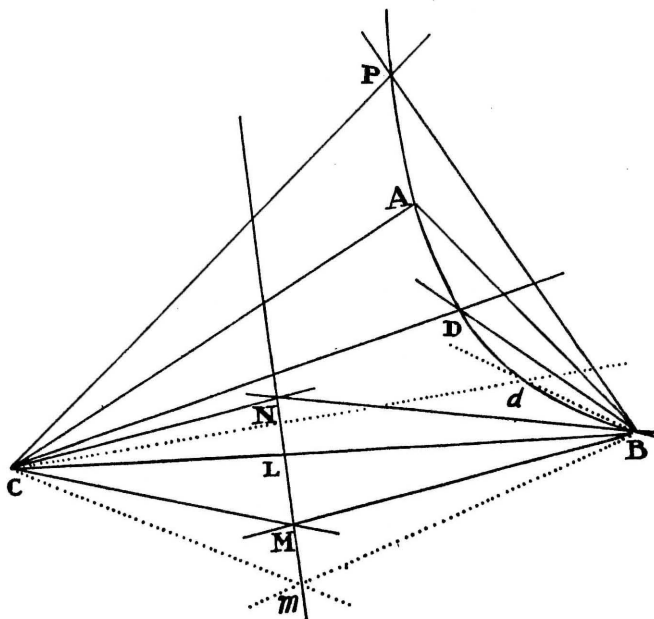
que (por suposição), os ângulos MBD, NBP são iguais, assim como também os ângulos MCD, NCP, remova os ângulos NBD e NCD que são comuns, e restarão os ângulos iguais NBM e PBT, NCM e PCR; e, portanto, os triângulos NBM, PBT, serão iguais, assim como os triângulos NCM, PCR. Por essa razão, PT está para NM como PB para NB; e PR para NM como PC para NC. Mas os pontos B, C, N, P são imóveis: por essa razão, PT e PR estão em uma dada razão para NM, e, conseqüentemente, em uma dada razão entre si; e, portanto (pelo Lema XX), o ponto D, onde as linhas retas móveis BT e CR concorrem continuamente, estará localizado numa seção cônica que passa pelos pontos B, C, P. Q.E.D.

E, inversamente, se o ponto móvel D está em uma seção cônica que passa pelos pontos dados B, C, A; e o ângulo DBM é sempre igual ao ângulo dado ABC e o ângulo DCM é sempre igual ao ângulo dado ACB, enquanto o ponto D cair sucessivamente sobre quaisquer dois pontos móveis *p*, P, da seção cônica, o ponto móvel M cairá sucessivamente sobre dois pontos imóveis *n*, N. Por esses pontos trace a linha reta *n*N: essa linha será o *locus* contínuo daquele ponto móvel M. Pois, se possível, tome o ponto M em qualquer linha curva. Logo, o ponto D estará localizado em uma seção cônica que passa pelos cinco pontos B, C, A, *p*, P, enquanto o ponto M está continuamente em uma linha curva. Mas, pelo que foi demonstrado anteriormente, o ponto D estará também localizado em uma seção cônica que passa pelos mesmos cinco pontos B, C, A, *p*, P. Por essa razão, ambas passarão pelos mesmos cinco pontos, contra o Corolário III, Lema XX. Portanto, é absurdo supor que o ponto M esteja localizado em uma linha curva. Q.E.D.

Proposição XXII. Problema XIV

Descrever uma cônica que deverá passar por cinco pontos dados.

Sejam A, B, C, P, D os cinco pontos. A partir de qualquer um deles, por exemplo, A, até quaisquer outros dois, como B, C, que podem ser chamados de pólos, trace as linhas retas AB, AC. Paralelamente a essas, trace pelo quarto ponto P, as linhas TPS, PRQ. Então, a partir dos dois pólos B, C, trace através do quinto ponto D duas linhas indefinidas BDT, CRD, encontrando as linhas antes traçadas TPS, PRQ (a primeira com a primeira, e a última com a última) em T e R. Trace então a linha reta *tr* paralelamente a TR, destacando das duas linhas retas PT, PR segmentos quaisquer P*t*, P*r*, proporcionais a PT, PR; e, se através de suas extremidades *t*, *r*, e pólos B, C, as linhas retas B*t*, C*r* forem traçadas encontrando-se em *d*, tal ponto estará na cônica requerida. Pois (pelo Lema XX), aquele ponto *d* está localizado em uma seção cônica que passa pelos quatro pontos A, B, C, P; e anulando-se as linhas R*r*, T*t*, o ponto *d* vem a coincidir com o ponto D. Por essa razão, a seção cônica passa pelos cinco pontos A, B, C, P, D. Q.E.D.

O Mesmo de Outra Maneira:

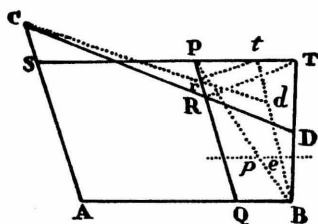
Una quaisquer três pontos dados, como A, B e C; e girando os ângulos ABC, ACB em torno de dois desses pontos tomados como pólos, B e C, por exemplo, aplique os lados sucessivamente aos pontos D e P; e marque os pontos M, N em que os outros lados BL, CL se cruzam naqueles dois casos. Trace a linha indefinida MN, e gire aqueles ângulos móveis em torno de seus pólos B, C, de tal maneira que a interseção dos lados BL, CL ou BM, CM, que agora se supõe ser *m*, possa sempre estar naquela linha reta indefi-

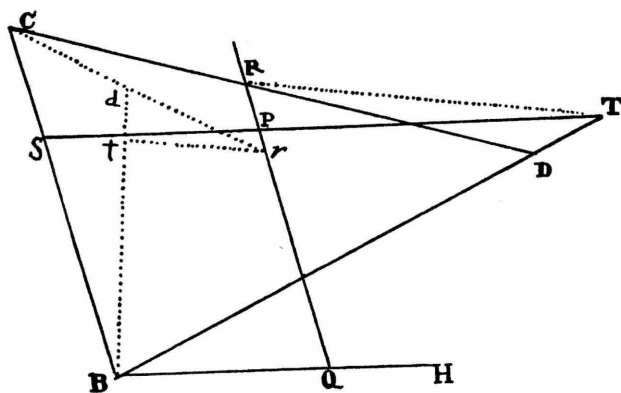
nida MN; e a interseção dos lados BA, CA ou BD, CD, que se supõe agora ser *d*, descreverá a cônica requerida, PAD*d*B. Pois (pelo Lema XXI) o ponto *d* estará localizado em uma seção cônica que passa pelos pontos B, C; e quando o ponto *m* vem a coincidir com os pontos L, M, N o ponto *d* (por construção) virá a coincidir com os pontos A, D, P. Por essa razão, será descrita uma seção cônica passando pelos cinco pontos A, B, C, P, D. Q.E.F.

COROLÁRIO I – Assim, uma linha reta pode ser prontamente traçada, a qual deve ser uma tangente à cônica em qualquer ponto dado B. Faça o ponto *d* vir a coincidir com o ponto B, e a linha reta B*d* tornar-se-á a tangente requerida.

COROLÁRIO II – Assim também podem ser encontrados os centros, os diâmetros e os *latera recta* das cônicas, como no Corolário II, Lema XIX.

Escólio

A primeira dessas construções se tornará um pouco mais simples se unirmos B, P, e, naquela linha, estendida se necessário, tomando B*p* para PB assim como PR está para PT; e, através de *p*, trace a linha reta indefinida *pe* paralelamente a SPT; naquela linha *pe*, tome sempre *pe* igual a P*r*, e trace as linhas retas B*e*, C*r* de modo a se encontrarem em *d*. Pois uma vez que P*r* para

P*t*, PR para PT, *p*B para PB, *pe* para P*t*, estão todos na mesma razão, *pe* e P*r* serão sempre iguais. Dessa maneira, os pontos da cônica são encontrados de maneira imediata, a menos que você prefira descrever a curva mecanicamente, como na segunda construção.

Proposição XXIII. Problema XV

Descreva uma cônica que deve passar por quatro pontos dados e tocar uma linha reta dada.

Caso 1 – Suponha que HB seja uma tangente dada, B o ponto de contato, e C, D, P os outros três pontos dados. Una BC e trace PS paralelamente a BH, e PQ paralela a BC; complete o paralelogramo BSPQ. Trace BD cortando SP em T, e CD cortando PQ em R. Finalmente, trace qualquer linha *tr* paralelamente a TR, destacando de PQ, PS os segmentos P*r*, P*t*, proporcionais a PR, PT, respectivamente, e trace C*r*, B*t*; o seu ponto de interseção *d* (pelo Lema XX) sempre cairá na cônica a ser descrita.

O Mesmo de Outra Maneira:

Faça o ângulo CBH, de uma dada grandeza, girar em torno do pólo

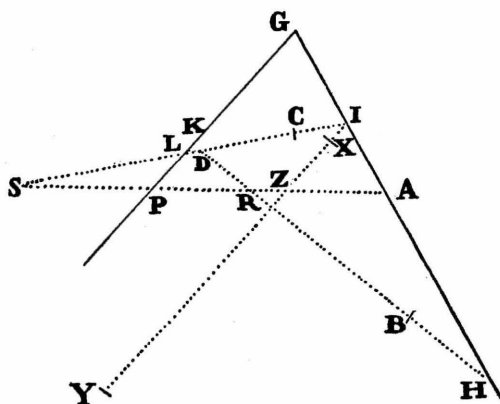
B, bem como o raio retilíneo DC, estendido para os lados, em torno do pólo C. Marque os pontos M, N, nos quais o lado BC do ângulo corta aquele raio quando BH, o outro lado traçado a partir de B, encontra o mesmo raio nos pontos P e D. Então, traçando a linha indefinida MN, faça aquele raio CP e o lado BC do ângulo encontrarem-se continuamente nessa linha; e o ponto de encontro do outro lado BH com o raio delineará a cônica requerida.

Pois, se nas construções do Problema precedente o ponto A vier a coincidir com o ponto B, as linhas CA e CB coincidirão, e a linha AB, na sua situação final, tornar-se-á a tangente BH; e, portanto, as construções lá registradas tornar-se-ão as mesmas que as construções aqui descritas. Por essa razão, a interseção do lado BH com o raio descreverá uma seção cônica que passa pelos pontos C, D, P, e toca a linha BH no ponto B. Q.E.F.

Caso 2 – Suponha os quatro pontos dados B, C, D, P, situados fora da tangente HI. Una cada dois deles pelas linhas BD, CP encontrando-se em G, e cortando a tangente em H e I. Corte a tangente em A de tal maneira que HA esteja para IA assim como o produto da média proporcional entre CG e GP e da média proporcional entre BH e HD está para o produto da média proporcional entre GD e GB e da média proporcional entre PI e IC; e A será o ponto de contato. Pois se HX, uma paralela à linha reta PI, cortar a cônica

em quaisquer pontos X e Y, o ponto A (pelas propriedades das seções cônicas) estará de tal modo localizado, que HA^2 estará para AI^2 em uma razão que é composta da razão do retângulo HX.HY para o retângulo BH.HD ou do retângulo CG.GP para o retângulo DG.GB; e a razão do retângulo BH.HD para o retângulo PI.IC. Mas após o ponto de contato A ser encontrado, a cônica será descrita como no primeiro Caso. Q.E.F. Porém, o ponto A pode ser tomado tanto entre os pontos H e I como fora do segmento delimitado por esses pontos, pelo que uma dupla cônica pode ser descrita.

Proposição XXIV. Problema XVI

Descrever uma cônica que deve passar por três pontos dados e tocar duas linhas retas dadas.

Suponha que HI, KL sejam as tangentes dadas e B, C, D os pontos dados. Através de quaisquer desses pontos, como B e D por exemplo, trace a linha reta indefinida BD encontrando as tangentes nos pontos H, K. Então, da mesma maneira, através de quaisquer outros dois desses pontos, como C, D, trace a linha reta indefinida CD encontrando as tangentes nos pontos I, L. Corte as linhas traçadas em R e S, de modo que HR esteja para KR como a média proporcional entre BH e HD está para a média proporcional entre BK e KD, e IS para LS como a média proporcional entre CI e ID está para a média proporcional entre CL e LD. Mas você pode cortá-las como preferir, tanto entre os pontos K e H, I e L, como fora dos segmentos por eles delimitados. Então trace RS cortando as tangentes em A e P, e estes serão os pontos de contato. Pois se A e P forem os pontos de contato, situa-

dos em qualquer outro lugar nas tangentes, e através de qualquer dos pontos H, I, K, L, como I, por exemplo, situado em qualquer tangente HI, uma linha reta IY for traçada paralelamente à outra tangente KL, encontrando a curva em X e Y, e naquela linha reta, IZ for tomado igual à média proporcional entre IX e IY, o retângulo XI.IY ou IZ^2 (pelas propriedades das seções cônicas) estará para LP^2 como o retângulo CI.ID está para o retângulo CL.LD; isto é (pela construção), como SI está para SL^2 e, portanto, IZ : LP = SI : SL. Por essa razão, os pontos S, P, Z situam-se em uma linha reta. Além disso, uma vez que as tangentes se encontram em G, o retângulo XI.IY ou IZ^2 estará (pelas propriedades das seções cônicas) para IA^2 como GP^2 está para GA^2 e, conseqüentemente, IZ : IA = GP : GA. Por essa razão, os pontos P, Z, A situam-se em uma linha reta, o mesmo acontecendo com os pontos S, P, e A. E o mesmo argumento provará que os pontos R, P e A estão em uma linha reta. Por essa razão, os pontos de contato A e P situam-se na linha reta RS. Mas, após esses pontos serem encontrados, a cônica pode ser descrita, como no primeiro Caso do Problema precedente. Q.E.F.

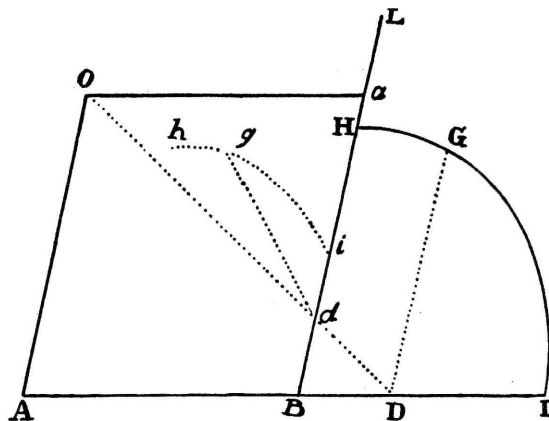
Nesta Proposição, e no Caso 2 da precedente, as construções são as mesmas, com a linha reta XY cortando a cônica em X e Y, ou não; elas não dependem daquela seção. Mas tendo sido demonstradas as construções em que aquela linha reta realmente corta a cônica, as construções em que ela não corta também são conhecidas; e, portanto, para ser breve, omitirei quaisquer outras demonstrações delas.

LEMA XXII[2]

Transformar figuras em outras figuras do mesmo tipo.

Suponha que qualquer figura HGI deva ser transformada. Trace, como quiser, duas linhas paralelas AO, BL, cortando uma terceira linha dada qualquer AB em A e B, e a partir de qualquer ponto G da figura, trace qualquer linha reta GD, paralela a OA, até encontrar a linha reta AB. Então, a partir de qualquer ponto dado O na linha OA, trace até o ponto D a linha reta OD, encontrando BL em *d*; e a partir do ponto de interseção, levante a linha reta *dg* formando um ângulo dado qualquer com a linha reta BL, e tendo uma razão tal para O*d* como DG tem para OD; e *g* será o ponto na nova figura *hgi*, correspondente ao ponto G. Da mesma maneira, os vários

2. Ver nota 20 do Apêndice.

pontos da primeira figura fornecerão um número igual de pontos correspondentes da nova figura. Portanto, se concebermos que o ponto G é deslocado por um movimento contínuo através de todos os pontos da primeira figura, o ponto *g* será igualmente deslocado em um movimento contínuo através de todos os pontos da nova figura, e descreverá a mesma. Para fazer distinção, chame DG a primeira ordenada, *dg* a nova ordenada, AD a primeira abcissa, *ad* a nova abcissa, O o pólo, OD o raio cortante, OA ao primeiro raio ordenado e O*a* (pelo qual o paralelogramo OAB*a* é completado) o novo raio ordenado.

Afirmo, então, que se o ponto G está localizado em uma linha reta dada, o mesmo acontecerá como o ponto *g*. E se o ponto G está situado em uma seção cônica, o mesmo acontecerá com o ponto *g*. E aqui tomo o círculo como uma das seções cônicas. Mas além disso, se o ponto G está localizado em uma linha de terceira ordem analítica, o mesmo acontecerá com o ponto *g*, e assim por diante, em linhas curvas de ordens mais altas. As duas linhas nas quais os pontos G, *g* estão localizados serão sempre da mesma ordem analítica. Pois $ad : OA = Od : OD = dg : DG = AB : AD$, e, portanto, AD é igual a $\frac{OA.AB}{ad}$ e DG igual a $\frac{OA.dg}{ad}$. Agora, se o ponto G está localizado em uma linha reta, e, portanto, a relação entre a abcissa AD e a ordenada GD for expressa por uma equação na qual aquelas linhas indeterminadas não se elevam mais do que uma dimensão, escrevendo a equação $\frac{OA.AB}{ad}$ em lugar de AD, e $\frac{OA.dg}{ad}$ em lugar de DG, uma nova equação será obtida, em que a nova abcissa *ad* e a nova ordenada *dg* elevam-se somente a uma di-

mensão; a qual, portanto, deve representar uma linha reta. Mas se AD e DG (ou qualquer uma delas) estivesse elevada a duas dimensões na primeira equação, *ad* e *dg* igualmente apareceriam elevadas as duas dimensões na segunda equação. E assim por diante em três ou mais dimensões. As linhas indeterminadas *ad*, *dg* na segunda equação, e AD, DG na primeira, sempre estarão elevadas ao mesmo número de dimensões; e, portanto, as linhas em que os pontos G, *g* estão localizados são de mesma ordem analítica.

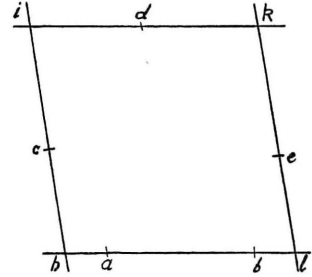
Afirmo, além disso, que se qualquer linha reta tocar a linha curva na primeira figura, a mesma linha reta transferida da mesma maneira com a linha curva para a nova figura, tocará aquela linha curva na nova figura, e vice-versa. Pois se imaginarmos dois pontos quaisquer da curva na primeira figura como aproximando-se um do outro até coincidirem, os mesmos pontos transferidos aproximar-se-ão um do outro até coincidirem na nova figura; e, portanto, as linhas retas com as quais aqueles pontos são unidos tornar-se-ão ambas as tangentes das curvas nas duas figuras. Eu poderia ter dado demonstrações dessas afirmativas de uma forma mais geométrica, mas estudo para ser breve.

Por essa razão, se uma figura retilínea deve ser transformada em uma outra, precisamos apenas transferir as interseções das linhas retas que formam a primeira figura, e por meio das interseções transferidas, traçar linhas retas na nova figura. Mas se uma figura curvilínea deve ser transformada, devemos transferir os pontos, as tangentes e outras linhas retas, pelos quais a linha curva é definida. Este Lema é útil na solução de Problemas mais difíceis; pois, por meio dele, podemos transformar as figuras propostas, se intrincadas, em outras mais simples. Assim, quaisquer linhas retas que convergem para um ponto são transformadas em paralelas, tomando-se como o primeiro raio ordenado qualquer linha reta que passe pelo ponto de interseção das linhas convergentes, e isso porque seu ponto de interseção é, dessa maneira, afastado *in infinitum*; e as linhas são paralelas por tenderem para um ponto infinitamente remoto. E após o problema ser resolvido na nova figura, se, pelas operações inversas, transformarmos a nova na primeira figura, teremos a solução requerida.

Este Lema é útil também na solução de problemas sólidos. Pois, tão freqüentemente quanto a ocorrência de duas seções cônicas, por cuja interseção um problema pode ser resolvido, qualquer uma delas pode ser transformada, se for uma hipérbole ou uma parábola, em uma elipse e, então, tal elipse pode ser facilmente transformada em um círculo. Assim também uma linha reta e uma seção cônica, na construção de problemas planos, podem ser transformadas em uma linha reta e em um círculo.

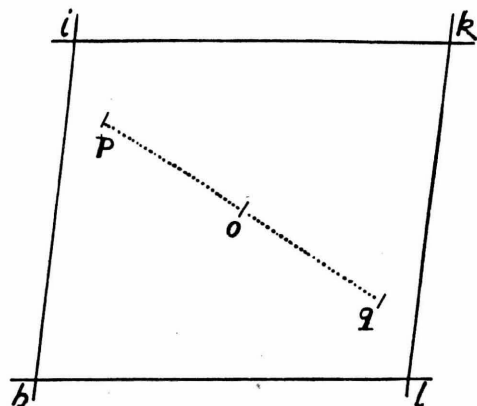
PROPOSIÇÃO XXV. PROBLEMA XVII

Descrever uma cônica que deve passar por dois pontos dados e tocar três linhas retas dadas.

Através da interseção de quaisquer duas das tangentes e da interseção da terceira tangente com a linha reta que passa pelos dois pontos dados, trace uma linha reta indefinida; e, tomando essa linha como o primeiro raio ordenado, transforme a figura pelo Lema precedente numa nova figura. Nessa figura, aquelas duas tangentes tornar-se-ão paralelas uma à outra e a terceira tangente será paralela à linha reta que passa pelos dois pontos dados. Suponha que *hi, kl* sejam aquelas duas tangentes paralelas, *ik* a terceira tangente, e *hl* uma linha reta paralela a essa, passando por aqueles dois pontos *a, b,* pelos quais a seção cônica deve passar nessa nova figura; e, completando o paralelogramo *hikl,* faça as linhas retas *hi, ik, kl* serem cortadas em *c, d, e* de modo que *hc* possa estar para a raiz quadrada do retângulo *ahb, ic* para *id* e *ke* para *kd,* como a soma das linhas retas *hi* e *kl* está para a soma das três linhas, a primeira das quais é a linha reta *ik,* e as outras duas são as raízes quadradas dos retângulos *ahb* e *alb*; e *c, d* e *e* serão os pontos de contato. Pois, pelas propriedades das seções cônicas, $hc^2 : ah.hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al.lb$.

$$\text{Portanto, } hc : \sqrt{(ah.hb)} = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{(al.lb)}$$
$$= hc + ic + ke + el : \sqrt{(ah.hb)} + id + kd + \sqrt{al.lb}$$
$$= hi + kl : \sqrt{(ah.hb)} + ik + \sqrt{(al.lb)}\,.$$

Portanto, a partir daquela razão dada, teremos os pontos de contato *c, d, e,* na nova figura. Pelas operações invertidas do último Lema, transfira aqueles pontos para a primeira figura, e a cônica estará lá descrita pelo Problema XIV. Q.E.F. Mas, dependendo se os pontos *a, b,* caírem entre os pontos *h, l,* ou fora deles, os pontos *c, d, e,* deverão ser tomados entre os pontos *h, i, k, l,* ou fora deles. Se um dos pontos *a, b,* cair entre os pontos *h, i,* e o outro fora dos pontos *h, l,* o Problema é impossível.

PROPOSIÇÃO XXVI. PROBLEMA XVIII

Descrever uma cônica que deve passar por um ponto dado e tocar quatro linhas retas dadas.

A partir das interseções comuns de quaisquer duas das tangentes até a interseção comum das outras duas, trace uma linha reta indefinida; e, tomando essa linha como o primeiro raio ordenado, transforme a figura (pelo Lema XXII) em uma nova figura, e os dois pares de tangentes, cada um dos quais que anteriormente concorriam no primeiro raio ordenado, agora se tornarão paralelos. Sejam *hi* e *kl, ik* e *hl,* os pares de paralelas que completam o paralelogramo *hikl.* E seja *p* o ponto nesta nova figura que corresponde ao ponto dado na primeira figura. Através de O, que é o centro da figura, trace *pq:* e sendo O*q* igual a O*p, q* será o outro ponto pelo qual a seção cônica deve passar nesta nova figura. Seja este ponto transferido, pela operação inversa do Lema XXII, para a primeira figura, e ali teremos os dois pontos pelos quais a cônica deve ser descrita. Mas, por aqueles pontos, aquela cônica pode ser descrita pela Proposição XVII.

Lema XXIII

Se duas linhas retas dadas, como AC, BD, *terminando em pontos dados* A, B, *estão em uma dada razão uma para a outra, e a linda reta* CD, *pela qual os pontos indeterminados* C *e* D *são ligados, é cortada em* K *em uma dada razão, afirmo que o ponto* K *estará localizado em uma linha reta dada.*

Faça as linhas retas AC, BD encontrarem-se em E, e em BE tome BG para AE como BD está para AC, e seja FD sempre igual à linha dada EG; e, por construção, EC estará para GD, isto é, para EF, como AC para BD, e, portanto, em uma dada razão; e, assim, o triângulo EFC estará dado em natureza. Seja CF cortado em L de modo que CL possa estar para CF na razão de CK para

CD; e como aquela é uma razão dada, o triângulo EFL estará determinado, e, portanto, o ponto L estará localizado na linha reta dada EL. Una LK, e os triângulos CLK, CFD serão semelhantes; e como FD é uma linha dada, e LK está para FD em uma dada razão, LK também será dado. Para isso, tome EH igual a ele, e ELKH será sempre um paralelogramo. E, portanto, o ponto K está sempre localizado no lado dado HK daquele paralelogramo. Q.E.D.

COROLÁRIO – Como a figura EFLC é dada em natureza, as três linhas retas EF, EL e EC, isto é, GD, HK e EC terão razões dadas entre si.

LEMA XXIV

Se três linhas retas, duas das quais são paralelas e dadas em posição, tocam qualquer seção cônica, afirmo que o semidiâmetro da seção que é paralelo àquelas duas é uma média proporcional entre os segmentos daquelas duas que são interceptadas entre os pontos de contato e a terceira tangente.

Sejam AF, GB as duas paralelas que tocam a seção cônica ADB em A e B; seja EF a terceira linha reta que toca a seção cônica em I, e que encontra as duas tangentes anteriores em F e G; e seja CD o semidiâmetro da figura, paralelo àqueles tangentes; afirmo que AF, CD, BG são continuamente proporcionais. Pois, se os diâmetros conjugados AB, DM encontram a tangente FG em E e H, e cortam-se em C, o paralelogramo IKCL é completado; a partir da natureza das seções cônicas, EC : CA = CA : CL;

então, EC - CA : CA - CL = EC : CA

ou EA : AL = EC : CA;

então, EA : EA + AL = EC : EC + CA

ou EA : EL = EC : EB.

Portanto, devido à semelhança dos triângulos EAF, ELI, ECH, EBG,

AF : LI = CH : BG.

Da mesma forma, a partir da natureza das seções cônicas,

LI ou CK : CD = CD : CH.

Tomando os produtos dos termos correspondentes nas duas últimas proporções e simplificando, AF : CD = CD : BG. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se duas tangentes FG, PQ encontram duas tangentes paralelas AF, BG em F e G, P e Q, e cortam-se em O; então, pelo Lema aplicado a EG e PQ,

AF : CD = CD : BG,

BQ : CD = CD : AP.

Portanto, AF : AP = BQ : BG

e AP - AF : AP = BG - BQ : BG

ou PF : AP = GQ : BG,

e AP : BG = PF : GQ = FO : GO = AF : BQ.

COROLÁRIO II – Por essa razão, também as duas linhas retas PG, FQ, traçadas através dos pontos P e G, F e Q, encontrar-se-ão na linha reta ACB que passa pelo centro da figura e pelos pontos de contato A, B.

LEMA XXV

Se quatro lados de um paralelogramo, estendidos indefinidamente, tocam qualquer seção cônica e são cortados por uma quinta tangente, afirmo que, tomando aqueles segmentos de quaisquer dois lados adjacentes que terminam em ângulos opostos do paralelogramo, qualquer dos dois segmentos está para o lado do qual ele é destacado, como aquela parte do outro lado adjacente, que é interceptada entre o ponto de contato e o terceiro lado, está para o outro segmento.

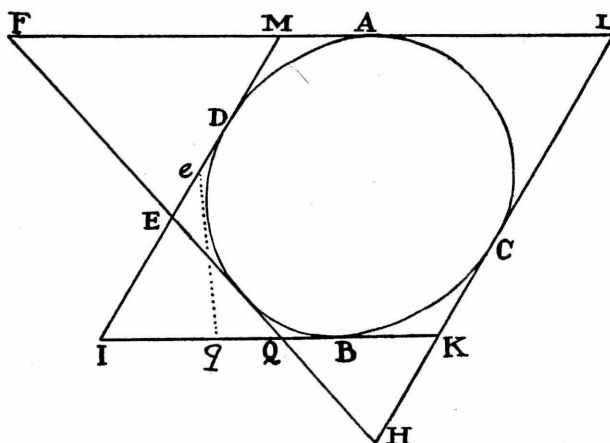
Faça os quatro lados ML, IK, KL, MI do paralelogramo MLIK tocar a seção cônica em A, B, C, D; e faça a quinta tangente FQ cortar aqueles lados em F, Q, H e E; e tomando os segmentos ME, KQ dos lados MI, KI, ou os segmentos KH, MF dos lados KL, ML, afirmo que ME : MI = BK : KQ, e KH : KL = AM : MF.

Pois, pelo Corolário I do Lema precedente,

ME : EI = AM ou BK : BQ,

e somando, ME : MI = BK : KQ. Q.E.D.

Também, KH : HL = BK ou AM : AF,

e subtraindo, KH : KL = AM : MF. Q.E.D.

Corolário I – Assim, se um paralelogramo IKLM descrito em torno de uma dada seção cônica é dado, o retângulo KQ.ME, bem como o retângulo KH.MF igual a ele, serão dados. Pois, devido à semelhança dos triângulos KQH, MFE, aqueles retângulos são iguais.

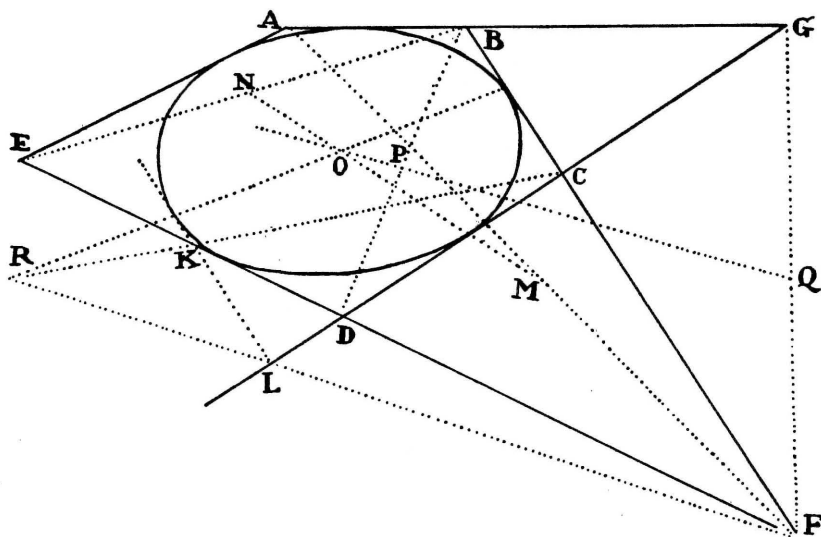
Corolário II – E se uma sexta tangente *eq* é traçada encontrando as tangentes KI, MI em *q* e *e*, o retângulo KQ.ME será igual ao retângulo K*q*.M*e*, e

KQ : M*e* = K*q* : ME,

e subtraindo, KQ : M*e* = Q*q* : E*e*.

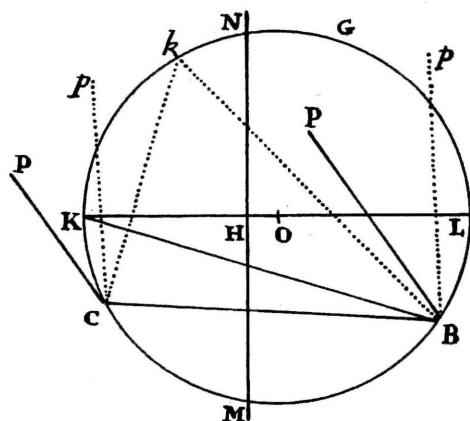
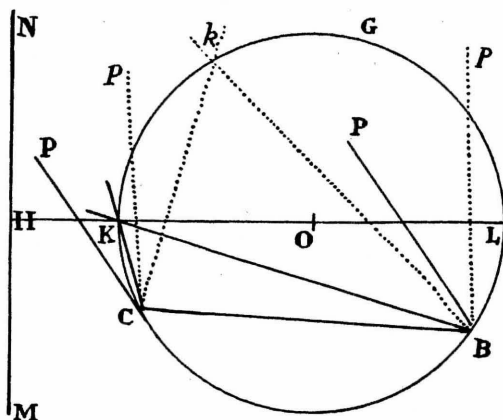
Corolário III – Portanto, também, se E*q*, *e*Q são unidos e bisseccionados, e uma linha reta é traçada através dos pontos de bissecção, tal linha passará pelo centro da seção cônica. Pois, uma vez que Q*q* : E*e* = KQ : M*e*, a mesma linha reta passará pelo meio de todas as linhas E*q*, *e*Q, MK (pelo Lema XXIII), e o ponto médio da linha reta MK é o centro da seção.

Proposição XXVII. Problema XIX

Descrever uma cônica que pode tocar cinco linhas retas dadas em posição.

Suponha que ABG, BCF, GCD, FDE, EA sejam as tangentes dadas em posição. Bisseccione em M e N as diagonais AF e BE da figura quadrilateral ABFE, contida sob quaisquer quatro delas; e (pelo Corolário III, Lema XXV) a linha reta MN traçada pelos pontos de bissecção passará pelo centro da cônica. Bisseccione novamente em P e Q as diagonais (se posso chamá-las assim) BD, GF da figura quadrilateral BGDF, contida sob quaisquer outras quatro tangentes, e a linha reta PQ traçada através dos pontos de bissecção passará pelo centro da cônica; e, portanto, o centro será obtido na intersecção das linhas biseccionadas. Suponha que ele seja O. Paralelamente a qualquer tangente BC, trace KL a uma distância tal, que o centro O possa ser colocado no meio, entre as paralelas; essa linha KL tocará a cônica a ser descrita. Faça com que ela corte quaisquer outras duas tangentes GCD, FDE, em L e K. Pelos pontos C e K, F e L, onde as tangentes não-paralelas CL, FK encontram as tangentes paralelas CF, KL, trace CK, FL, encontrando-se em R; e a linha reta OR, traçada e estendida, cortará as tangentes paralelas CF, KL nos pontos de contato. Isso advém do Corolário II, Lema XXIV. E, pelo mesmo método, ou outros pontos de contato podem ser encontrados, e, então, a cônica pode ser descrita pelo Problema XIV. Q.E.F.

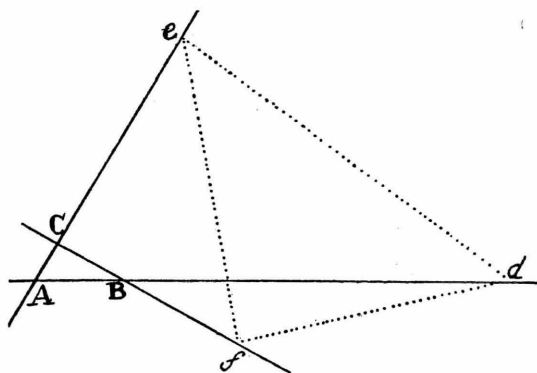
Escólio

Nas proposições precedentes, estão incluídos aqueles Problemas nos quais os centros ou as assíntotas das cônicas são dados. Pois quando pontos, tangentes e o centro são dados, tantos outros pontos e tantas outras tangentes são dadas a uma igual distância, do outro lado do centro. E uma assíntota deve ser considerada como uma tangente, e sua extremidade infinitamente remota (se podemos dizer assim) é um ponto de contato. Imagine o ponto de contato de qualquer tangente afastado *in infinitum*, e a tangente degenerará em uma assíntota, e as construções dos Problemas precedentes transformar-se-ão nas construções daqueles Problemas em que a assíntota é dada.

Após a cônica ser descrita, podemos encontrar seus eixos e focos da seguinte maneira. Na construção e na figura do Lema XXI, tome os lados BP, CP, dos ângulos móveis PBN, PCN, por cuja intersecção a cônica foi descrita e faça-os paralelo um ao outro; e, mantendo aquela posição, faça-os girar em torno de seus pólos B, C, naquela figura. Enquanto isso, faça os outros lados CN, BN daqueles ângulos, pela sua intersecção K ou *k*, descreverem o círculo BKGC. Seja O o centro desse círculo; e a partir desse centro, sobre a régua MN, onde aqueles lados CN, BN realmente concorrem enquanto a cônica foi descrita, faça incidir a perpendicular OH, encontrando o círculo em K e L. E quando aqueles outros lados CK, BK encontrarem-se no ponto K, que é o mais próximo da régua, os primeiros lados CP, BP serão paralelos ao eixo maior e perpendiculares ao menor; e o contrário acontecerá se aqueles lados se encontrarem no ponto mais remoto L. Por essa razão, se o centro da cônica for dado, os eixos serão dados; e esses sendo dados, os focos serão encontrados prontamente.

Mas os quadrados dos eixos estão um para o outro como KH para LH, e, assim, é fácil descrever uma cônica dada em natureza através de quatro pontos dados. Pois, se dois dos pontos dados C e B são tomados como os pólos, o terceiro fornecerá os ângulos móveis PCK, PBK; mas esses sendo dados, o círculo BGKC pode ser descrito. Então como a cônica é dada em natureza, a razão de OH para OK, e, portanto, OH propriamente dito, serão dados. Em torno do centro O, com o intervalo OH, descreva um outro círculo, e a linha reta que toca esse círculo e passa pela intersecção dos lados CK, BK, quando os primeiros lados CP, BP encontram-se no quarto ponto dado, será a régua MN, por meio da qual a cônica pode ser descrita. Portanto, por outro lado, também um trapézio dado em natureza (exceto uns poucos casos que são impossíveis) pode ser inscrito em uma seção cônica dada.

Há também outros Lemas, com auxílio dos quais cônicas dadas em natureza podem ser descritas através de pontos dados, e tocando linhas dadas. Isso ocorre de tal maneira que, se uma linha reta for traçada através de qualquer ponto dado em posição, podendo cortar uma dada seção cônica em dois pontos, e a distância das intersecções for bisseccionada, o ponto de bissecção tocará uma outra seção cônica do mesmo tipo que a primeira, com seus eixos sendo paralelos aos eixos da primeira. Mas me dirijo a coisas mais úteis.

Lema XXVI

Dispor os três ângulos de um triângulo, dado tanto em natureza como em magnitude, com relação a três linhas retas dadas em posição e que não sejam

todas paralelas entre si, de tal maneira que os vários ângulos sejam adjacentes às várias linhas.

Três linhas retas indefinidas AB, AC, BC são dadas em posição e é exigido o triângulo DEF de tal forma que seu ângulo D seja adjacente à linha AB, seu ângulo E à linha AC, e seu ângulo F à linha BC. Sobre DE, DF e EF, descreva três segmentos de círculos DRE, DGF, EMF, capazes de ter ângulos iguais aos ângulos BAC, ABC, ACB, respectivamente. Mas tais segmentos devem ser descritos na direção de tais lados das linhas DE, DF, EF, que as letras DRED possam girar na mesma ordem que as letras BACB; as letras DGFD na mesma ordem que as letras ABCA; e as letras EMFE na mesma ordem que as letras ACBA; então, completando aqueles segmentos de modo a formarem círculos inteiros, faça os dois primeiros círculos cortarem-se em G, e suponha que P e Q sejam seus centros. Então, unido GP, PQ, tome G*a* : AB = GP : PQ; em torno do centro G, com o intervalo G*a*, descreva um círculo que corte o primeiro círculo DGE em *a*. Una *a*D cortando o segundo círculo DFG em *b*, bem como *a*E cortando o terceiro círculo EMF em *c*. Complete à figura ABC*def*, semelhante e igual à figura *abc*DEF: afirmo que a questão está resolvida.

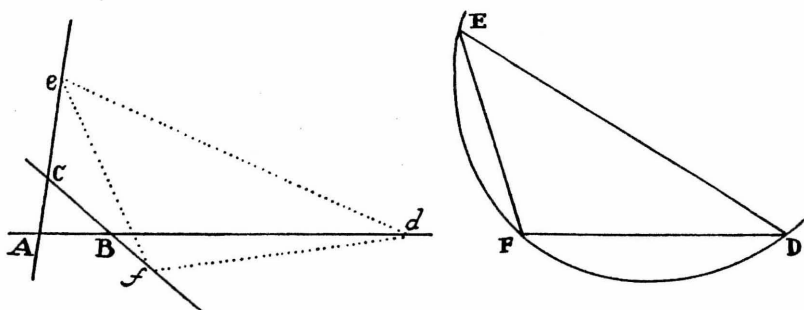
Pois, traçando F*c* encontrando *a*D em *n*, e unindo *a*G, *b*G, QG, QD, PD, por construção o ângulo E*a*D é igual ao ângulo CAB, e o ângulo *ac*F igual ao ângulo ACB; e, portanto, o triângulo *anc* é equiangular ao triângulo ABC. Por essa razão, o ângulo *anc* ou F*n*D é igual ao ângulo ABC e, conseqüentemente, ao ângulo F*b*D; e, portanto, o ponto *n* recai sobre o ponto *b*. Além disso, o ângulo GPQ, que é metade do ângulo GPD no centro, é igual ao ângulo G*a*D na circunferência; e o ângulo GQP, que é a metade do ângulo GQD no centro, é igual ao suplemento do ângulo G*b*D na circunferência e, portanto, igual ao ângulo G*ba*. Por essa razão, os triângulos GPQ, G*ab* são semelhantes, e G*a* : *ab* = GP : PQ, em, por construção, GP : PQ = G*a* : AB.

Por essa razão, *ab* e AB são iguais; e, conseqüentemente, os triângulos *abc*, ABC, que nós provamos serem semelhantes, também são iguais. E, assim, uma vez que os ângulos D, E, F do triângulo DEF, de fato, tocam respectivamente os lados *ab*, *ac*, *bc* do triângulo *abc*, a figura ABC*def* pode ser completada de modo a ficar semelhante e igual à figura *abc*DEF e, ao completá-la, o Problema estará resolvido. Q.E.F.

Corolário – Assim, pode-se traçar uma linha reta cujas partes dadas em comprimento podem ser interceptadas entre três linhas retas dadas em posição. Suponha que aproximando o ponto D do lado EF, e colocando os lados DE, DF em uma mesma linha reta, o triângulo DEF seja ele próprio transformado em uma linha reta cuja parte dada DE deve estar localizada entre as linhas AB, AC, dadas em posição; e sua parte dada DF deve estar localizada entre as linhas retas AB, BC, dadas em posição; então, aplicando a construção precedente a este caso, o Problema estará resolvido.

PROPOSIÇÃO XXVIII. PROBLEMA XX

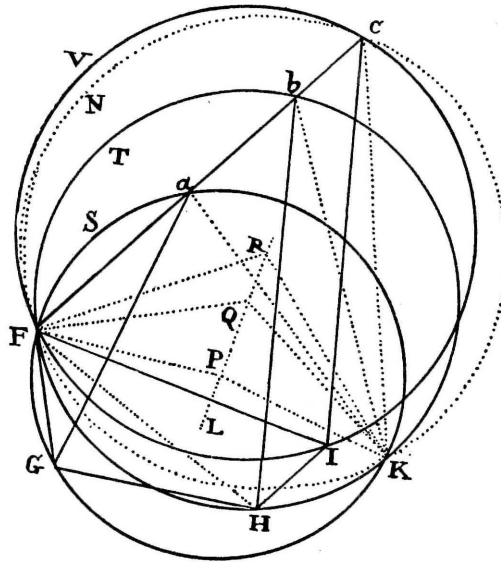
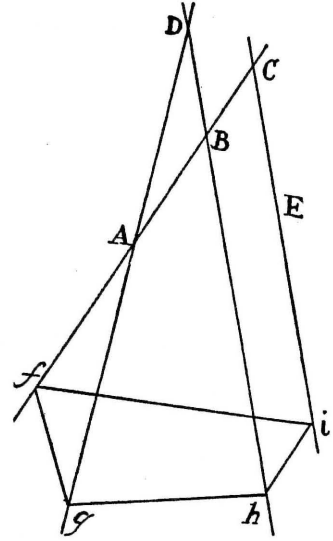
Descrever uma cônica dada tanto em natureza como em magnitude, cujas partes dadas devem estar localizadas entre três linhas retas dadas em posição.

Suponha que uma cônica deve ser descrita de modo a ser semelhante e igual à linha curva DEF, e que possa ser cortada por três linhas pelas retas AB, AC, BC, dadas em posição, em partes DE e EF, semelhantes e iguais às partes dadas na linha curva.

Trace as linhas retas DE, EF, DF, e posicione os ângulos D, E, F deste triângulo DEF de modo a tocar aquelas linhas retas dadas em posição (pelo Lema XXVI). Então, em torno do triângulo, descreva a cônica, semelhante e igual à curva DEF. Q.E.F.

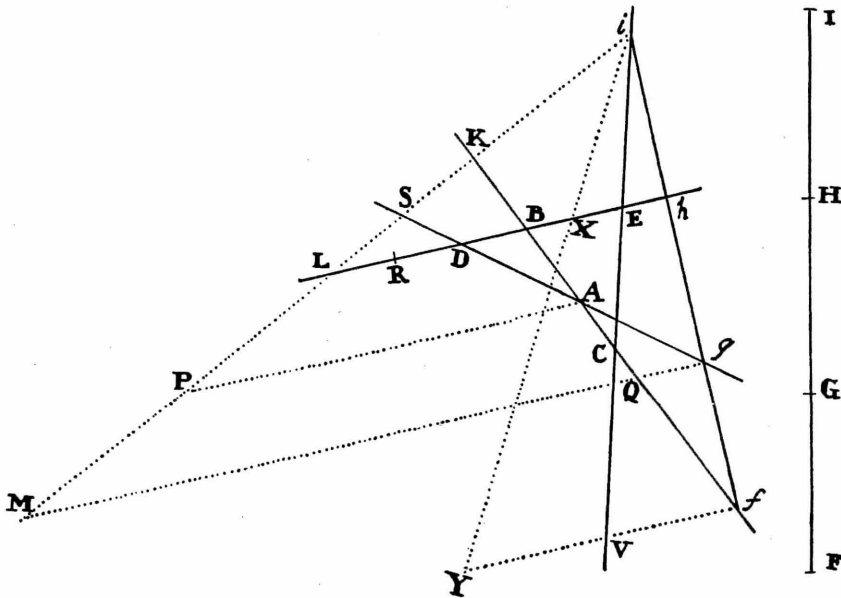
LEMA XXVII

Descrever um trapézio dado em natureza, cujos ângulos sejam adjacentes respectivamente a quatro linhas dadas em posição, que não são paralelas entre si e nem convergem para um ponto comum.

Sejam as quatro linhas retas ABC, AD, BD, CE dadas em posição, a primeira cortando a segunda em A, a terceira em B, e a quarta em C; e suponha que um trapézio *fghi* deva ser descrito de modo que seja semelhante ao trapézio FGHI, cujo ângulo *f*, igual ao ângulo dado F, seja adjacente à linha ABC; e os ângulos *g*, *h*, *i*, iguais aos outros ângulos dados G, H, I, sejam adjacentes às outras linhas AD, BD, CE, respectivamente. Una FH, e sobre FG, FH, FI, descreva igual quantidade de segmentos de círculos FSG, FTH, FVI, o primeiro dos quais, FSG, seja capaz de conter um ângulo igual ao ângulo BAD; o segundo, FTH, capaz de ter um ângulo igual ao ângulo CBD; e o

terceiro, FVI, de conter um ângulo igual ao ângulo ACE. Mas os segmentos devem ser descritos na direção daqueles lados das linhas FG, FH, FI, tal que a ordem circular das letras FSGF possa ser a mesma que a das letras BADB, e que as letras FTHF possam ter a mesma ordem circular que as letras CBDC, e as letras FVIF a mesma ordem circular que as letras ACEA. Complete os segmentos em círculos inteiros e faça P ser o centro do primeiro círculo FSG, e Q o centro do segundo, FTH. Una PQ e a estenda para os dois lados, e nela tome QR de modo que QR : PQ = BC : AB. Mas QR deve ser tomada na direção daquele lado do ponto Q tal que a ordem das letras P, Q, R, seja a mesma das letras A, B, C; e em torno do centro R, com o raio RF, descreva um quarto círculo FN*c* cortando o terceiro círculo FVI em *c*. Una F*c* cortando o primeiro círculo em *a*, e o segundo em *b*. Trace *a*G, *b*H, *c*I e faça a figura ABC*fghi* semelhante à figura *abc*FGHI; e o trapézio *fghi* será aquele que se queria descrever.

Faça os dois primeiros círculos FSG, FTH cortarem-se em K; una PK, QK, RK, *a*K, *b*K, *c*K, e estenda QP até L. Os ângulos F*a*K, F*b*K, F*c*K nas circun-

ferências são as metades dos ângulos FPK, FQK, FRK nos centros; e, portanto, iguais a LPK, LQK, LRK, que são as metades daqueles ângulos. Portanto, a forma PQRK é equiangular e semelhante à figura *abc*K, e, conseqüentemente, *ab* está para *bc* como PQ para QR, isto é, como AB para BC. Mas, por construção, os ângulos *f*A*g*, *f*B*h*, *f*C*i* são iguais aos ângulos F*a*G, F*b*H, F*c*I. E, portanto, a figura ABC*fghi* pode ser completada semelhantemente à figura *abc*FGHI. Feito isto, um trapézio *fghi* será construído semelhantemente ao trapézio FGHI, e seus ângulos *f*, *g*, *h*, *i*, serão adjacentes às linhas retas ABC, AD, BD, CE. Q.E.F.

Corolário – Assim pode-se traçar uma linha reta cujas partes, em uma dada ordem por quatro linhas retas dadas em posição, devam ter uma dada proporção entre si. Sejam os ângulos FGH, GHI aumentados de tal forma que as linhas reta FG, GH, HI estejam na mesma linha; e construindo o Problema nesta situação, uma linha reta *fghi* será traçada, cujas partes *fg*, *gh*, *hi*, limitadas pelas quatro linhas retas dadas em posição, AB e AD, AD e BD, BD e CE, estarão uma para a outra como as linhas FG, GH, HI, e observarão a mesma ordem entre si. Mas o mesmo pode ser mais prontamente feito da seguinte maneira:

Estenda AB até K e BD até L, de modo que BK esteja para AB como HI para GH; e DL para BD como GI para FG; e una KL de maneira a encon-

trar a linha reta CE em *i*. Estenda *i*L até M, de modo que LM esteja para *i*L como GH para HI; então trace MQ paralelamente a LB encontrando a linha reta AD em *g*, e uma *gi*, cortando AB, BD em *f*, *h*. Afirmo que a questão está resolvida.

Pois faça M*g* cortar a linha reta AB em Q, AD a linha reta KL em S, e trace AP paralelamente a BD, encontrando *i*L em P; e *g*M para L*h* (*gi* para *hi*, M*i* para L*i*, GI para HI, AK para BK) e AP para BL estarão na mesma razão. Corte DL em R, de modo que DL para RL estejam naquela mesma razão, e como *g*S para *g*M, AS para AP, e DS para DL são proporcionais, então, como *g*S está para L*h*, assim AS estará para BL, e DS para RL; e combinando, BL - RL estará para L*h* - BL como AS - DS para *g*S - AS. Isto é, BR está para B*h* como AD está para A*g* e, portanto, como BD para *g*Q. E, alternadamente, BR está para BD como B*h* para *g*Q, ou como *fh* para *fg*. Mas, por construção, a linha BL foi cortada em D e R na mesma razão que a linha FI em G e H; logo, BR está para BD como FH para FG. Assim, *fh* está para *fg* como FH para FG. Uma vez que *gi* está para *hi* do mesmo modo que M*i* para L*i*, isto é, como GI para HI, é evidente que as linhas FI, *fi* são cortadas de maneira semelhante em G e H, *g* e *h*. Q.E.F.

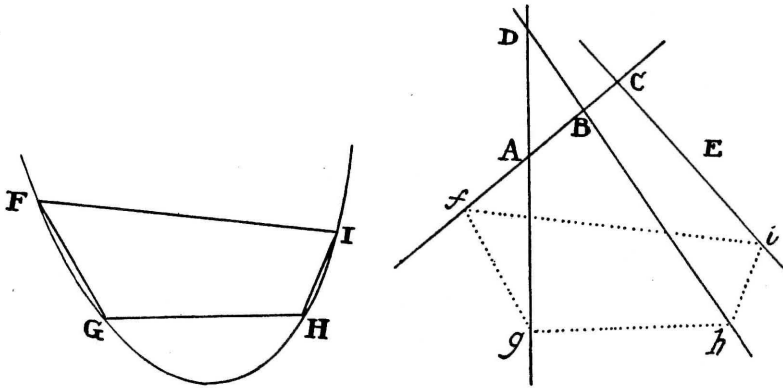
Na construção deste Corolário, após a linha LK ser traçada cortando CE em *i*, podemos estender *i*E até V, de modo que EV esteja para E*i* como FH para HI; e, então, traçar V*f* paralelamente a BD. Será o mesmo se, em torno do centro *i*, com um intervalo IH, descrevermos um círculo cortando BD em X, e estendermos *i*X até Y de modo que *i*Y seja igual a IF; e, então, traçarmos Y*f* paralelamente a BD.

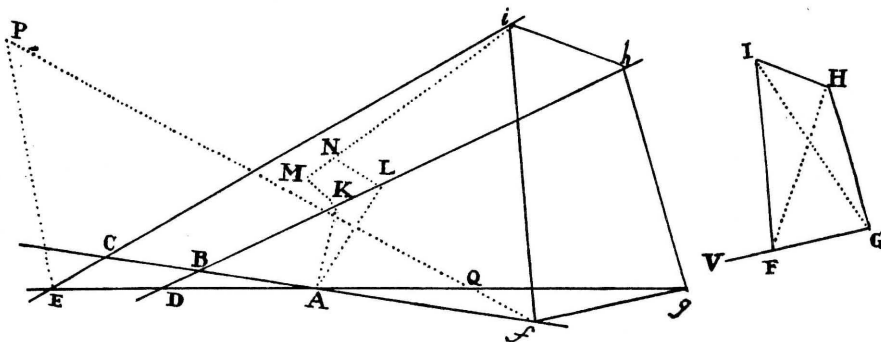
Sir *Christopher Wren* e Dr. *Wallis* deram outras soluções para este problema há muito tempo.

Proposição XXIX. Problema XXI

Descrever uma cônica dada em natureza que possa ser cortada por quatro linhas retas dadas em posição, em partes dadas em ordem, natureza e proporção.

Suponha que uma cônica deva ser descrita de modo a ser semelhante à linha curva FGHI, e cujas partes, semelhantes e proporcionais às partes FG, GH, HI da outra, possam estar compreendidas entre as linhas retas AB e AD, AD e BD, BD e CE dadas em posição, ou seja, a primeira entre o primeiro par daquelas linhas, a segunda entre o segundo, e a terceira entre o terceiro. Trace as linhas retas FG, GH, HI, FI; e (pelo Lema XXVII) descre-

va um trapézio *fghi* que seja semelhante ao trapézio FGHI, cujos ângulos *f, g, h, i* toquem as linhas retas dadas em posição AB, AD, BD, CE respectivamente. E, então, em torno deste trapézio, descreva uma cônica: essa cônica será semelhante à linha curva FGHI.

Escólio

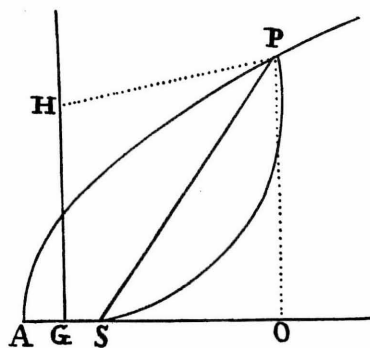
Este problema também pode ser construído da seguinte maneira. Unindo FG, GH, HI, FI, prolongue GF até V, una FH, IG, e faça os ângulos CAK, DAL iguais aos ângulos FGH, VFH. Faça AK, AL encontrarem a linha reta BD em K e L, e a partir daí, trace KM, LN, sendo que KM deve fazer o ângulo AKM ser igual ao ângulo GHI, e estar ela mesma para AK assim como HI está para GH; e faça LN formar o ângulo ALN igual ao ângulo FHI, e estar ela própria para AL assim como HI está para FH. Mas AK, KM, AL, LN devem ser traçadas em direção àqueles lados das linhas AD, AK, AL, tal que as letras CAKMC, ALKA, DALND possam ser tomadas circularmente na

mesma ordem que as letras FGHIF; e trace MN encontrando a linha reta CE em *i*. Faça o ângulo *i*EP ser igual ao ângulo IGF, e PE estar para E*i* assim como FG está para GI; e passando por P, trace PQ*f* de modo a formar com a linha reta ADE um ângulo PQE igual ao ângulo FIG, e que possa encontrar a linha reta AB em *f*, e una *fi*. Mas, PE e PQ devem ser traçadas em direção àqueles lados das linhas CE, PE tal que a ordem circular das letras PE*i*P e PEQP possa ser a mesma das letras FGHIF; e, se sobre a linha *fi*, na mesma ordem das letras, e semelhante ao trapézio FGHI, um trapézio *fghi* for construído, e uma cônica dada em natureza for circunscrita em torno dele, o Problema estará resolvido.

Até aqui tratamos de obter as órbitas. Resta determinar os movimentos dos corpos nas órbitas assim encontradas.

Como os movimentos devem ser encontrados quando as órbitas são dadas

Proposição XXX. Problema XXII

Encontrar, em qualquer tempo determinado, o lugar de um corpo que se move em uma dada parábola.

Seja S o foco e A o vértice principal da parábola; e suponha que 4AS.M seja igual à área parabólica a ser destacada, APS, que ou foi descrita pelo raio SP, desde a saída do corpo a partir do vértice, ou deve ser assim descrita antes de ele lá chegar. Agora, a quantidade daquela área a ser destacada é conhecida a partir do tempo que é proporcional a ela. Bisseccione AS em G e levante a perpendicular GH igual a 3M, e um círculo descrito em torno do centro H, com raio HS, cortará a parábola no lugar P requerido. Pois, fazendo incidir PO perpendicularmente sobre o eixo, e traçando PH, teremos $AG^2 + GH^2$ ($= HP^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2$) $= AO^2 + PO^2 - 2AO.AG - 2GH.PO + AG^2 + GH^2$. Donde, $2GH.PO$ ($= AO^2 +$

PO^2 - 2AO.AG) = AO^2 + ¾PO^2. Substitua AO^2 por AO. $\frac{PO^2}{4AS}$; então, dividindo todos os termos por 3PO e multiplicando-os por 2AS, teremos ⁴⁄₃ GH.AS (= ⅙ AO.PO + ½ AS.PO = $\frac{AO + 3AS}{6}$.PO = $\frac{4AO - 3SO}{6}$.PO = à área, APO - SPO) = à área APS. Mas GH era 3M e, portanto, ⁴⁄₃ GH.AS é 4AS.M. Assim, a área destacada APS é igual à área 4AS.M que havia sido destacada. Q.E.D.

Corolário I – Assim GH está para AS como o tempo no qual o corpo descreveu o arco AP está para o tempo no qual o corpo descreveu o arco entre o vértice A e a perpendicular levantada, a partir do foco S, sobre o eixo.

Corolário II – E supondo que um círculo ASP passe continuamente por um corpo móvel P, a velocidade do ponto H está para a velocidade que o corpo tinha no vértice A como 3 para 8; e, portanto, na mesma razão está a linha GH para a linha reta que o corpo, no tempo de seu movimento de A até P, descreveria com aquela velocidade que ele tinha no vértice A.

Corolário III – Portanto, por outro lado, pode ser encontrado o tempo no qual o corpo descreveu qualquer arco determinado AP. Una AP e, no seu ponto médio, levante uma perpendicular encontrando a linha reta GH em H.

Lema XXVIII[1]

Não há figura oval cuja área, arbitrariamente destacada por linhas retas, possa ser universalmente encontrada por meio de equações de qualquer número finito de termos e dimensões.

Suponha que dentro da figura oval um ponto qualquer dado seja tomado como pólo, em torno do qual uma linha reta gira continuamente com um movimento uniforme, enquanto, naquela linha reta, um ponto móvel, afastando-se do pólo, move-se sempre para a frente com uma velocidade proporcional ao quadrado daquela linha reta dentro da figura oval. Por esse movimento, aquele ponto descreverá uma espiral com circungirações infinitas. Agora, se uma porção de área da figura oval, destacada por aquela linha reta, pudesse ser encontrada por uma equação finita*, a distância que o ponto está do pólo, que é proporcional a esta área, poderia ser en-

1. Nota 21 do Apêndice
* Uma equação de grau finito (N.T.).

contrada pela mesma equação e, portanto, todos os da espiral poderiam também ser encontrados, por uma equação finita; e, portanto, a intersecção de uma linha reta dada em posição com a espiral pode também ser encontrada por uma equação finita. Mas toda a linha reta infinitamente estendida corta uma espiral em um número infinito de pontos; e a equação pela qual qualquer intersecção de duas linhas é encontrada, exibe ao mesmo tempo todas as suas intersecções através de um igual número de raízes e, portanto, alcança tantas dimensões quantas intersecções houver. Sendo que dois círculos cortam-se em dois pontos, uma daquelas intersecções só pode ser encontrada por uma equação de duas dimensões, pela qual a outra intersecção também pode ser encontrada. Porque pode haver quatro intersecções de duas seções cônicas, qualquer uma delas só pode ser encontrada universalmente por uma equação de quatro dimensões, pela qual todas elas podem ser encontradas juntas. Pois se aquelas intersecções forem procuradas individualmente, como a lei e condição de todas é a mesma, o cálculo será o mesmo em todos os casos e, portanto, a conclusão sempre a mesma, a qual deve assim abranger todas aquelas intersecções de uma vez só em si mesma, e exibi-las todas indiferentemente. Assim é que as intersecções de seções cônicas com curvas de terceira ordem, porque podem chegar a seis, surgem através de equações de seis dimensões; e as intersecções de duas curvas de terceira ordem, porque podem chegar a nove, surgem juntas por equações de nove dimensões. Se isso não acontece necessariamente, poderíamos reduzir todos os problemas de sólidos aos de planos, e aqueles de ordem mais alta do que os de sólidos, aos de sólidos. Mas aqui trato de curvas irredutíveis em potência. Pois se a equação pela qual a curva é definida pode ser reduzida a uma potência menor, a curva não será uma curva simples, mas composta de duas ou mais, cujas intersecções podem ser encontradas separadamente por diferentes cálculos. Da mesma forma, as duas intersecções de linhas retas com as seções cônicas surgem sempre por equações de duas dimensões; e as três intersecções de linhas retas com curvas irredutíveis de terceira ordem, por equações de três dimensões; as quatro intersecções de linhas retas com curvas irredutíveis de quarta ordem, por equações de quatro dimensões; e assim por diante *in infinitum*. Por essa razão, as inumeráveis intersecções de uma linha reta com uma espiral, uma vez que ela não é nada mais do que uma curva simples e não-redutível a mais curvas, requerem equações com um número infinito de dimensões e raízes, pelas quais elas podem ser todas exibidas juntas. Porque a lei e o cálculo de todas são os mesmos. Pois se uma perpendicular incide a partir do pólo sobre aquela linha reta interseccional, e aquela perpendicular, junto com a linha intersec-

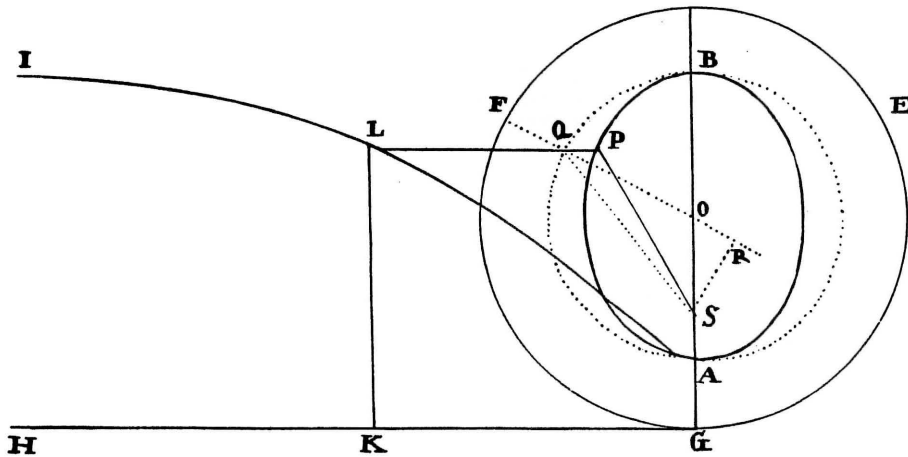
cional, gira em torno do pólo, as intersecções da espiral passarão mutuamente umas pelas outras; e aquela que era a primeira ou a mais próxima, após uma revolução, será a segunda; depois de duas, a terceira; e assim por diante; também a equação, pela qual a posição da linha interseccional é determinada, não será alterada nesse meio-tempo, a não ser que as grandezas daquelas quantidades sejam alteradas. Portanto, uma vez que aquelas quantidades, depois de todas as revoluções, retornam às suas primeiras grandezas, a equação retornará à sua primeira forma; e, conseqüentemente, a mesma equação exibirá todas as intersecções e terá, portanto, um número infinito de raízes, pelas quais todas podem ser representadas. Portanto, a intersecção de uma linha reta com uma espiral não pode ser encontrada universalmente por qualquer equação finita; e, assim, não há figura oval cuja área, destacada arbitrariamente por linhas retas, possa ser universalmente representada por qualquer equação como essa.

Pelo mesmo argumento, se o intervalo entre o pólo e o ponto pelo qual a espiral é descrita é tomado proporcionalmente àquela parte do perímetro da figura oval que é destacada, pode-se provar que o comprimento do perímetro não pode ser universalmente representado por qualquer equação finita. Mas aqui trato de figuras ovais que não são tocadas por figuras conjugadas que se projetam *in infinitum*.

COROLÁRIO – Assim, a área de uma elipse, descrita por um raio traçado a partir do foco até o corpo móvel, não pode ser encontrada a partir do tempo dado por uma equação finita; e, portanto, não pode ser determinada pela descrição de curvas geometricamente racionais. Chamo de geometricamente racionais aquelas curvas em que todos os pontos podem ser determinados por comprimentos que são definíveis, isto é, por razões complicadas de comprimentos. Chamo outras curvas (tais como espirais, quadratrizes, e ciclóides) de geometricamente irracionais. Pois os comprimentos, que estão ou não como número para número (de acordo com o Livro X, *Elementos de Euclides*), são aritmeticamente racionais ou irracionais. E, portanto, destaco uma área de uma elipse proporcional ao tempo no qual ela é descrita por uma curva geometricamente irracional, da seguinte maneira:

PROPOSIÇÃO XXXI. PROBLEMA XXIII

Encontrar o lugar de um corpo que se move em uma elipse dada em qualquer tempo determinado.

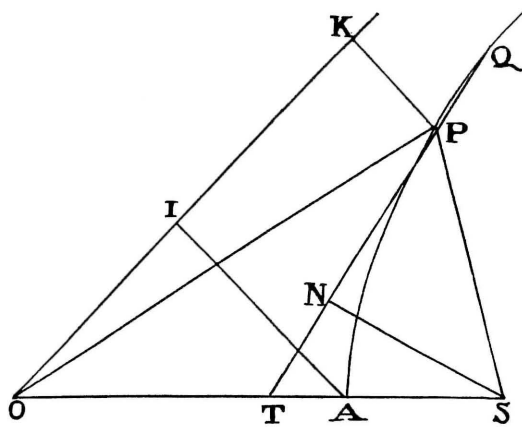
Suponha que A é o vértice principal, S o foco e O o centro da elipse APB; e seja P o lugar do corpo a ser encontrado. Estenda OA até G, de modo que OG : OA = OA : OS. Trace a perpendicular GH e, em torno do centro O, com o raio OG, descreva o círculo GEF; e sobre a régua GH, como uma base, suponha que a roda GEF move-se para a frente, girando em torno de seu eixo e, enquanto isso, seu ponto A descreve a ciclóide ALI. Feito isso, tome GK para o perímetro GEFG da roda, na razão do tempo no qual o corpo procedente de A descreveu o arco AP, para o tempo de uma revolução completa na elipse. Levante a perpendicular KL de modo a encontrar a ciclóide em L; então, LP, traçada paralelamente a KG, encontrará a elipse em P, o lugar requerido do corpo.

Pois em torno o centro O, com o raio OA, descreva o semicírculo AQB, e faça LP, estendida se necessário, encontrar o arco AQ em Q e una SQ, OQ. Faça OQ encontrar o arco EFG em F e, sobre OQ, faça incidir a perpendicular SR. A área APS varia como a área AQS, isto é, como a diferença entre o setor OQA e o triângulo OQS, ou como a diferença dos retângulos ½ OQ.AQ e ½ OQ.SR, isto é, porque ½ OQ é dado, como a diferença entre o arco AQ e a linha reta SR; e, portanto [devido à igualdade das razões dadas SR para o seno do arco AQ, OS para OA, OA para OG, AQ para GF; e, por divisão, AQ - SR para GF - seno do arco AQ], como GK, a diferença entre o arco GF e o seno do arco AQ. Q.E.D.

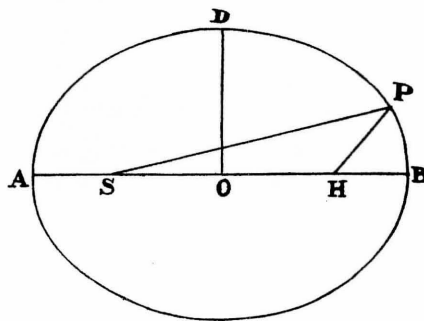
Escólio

Mas uma vez que a descrição dessa curva é difícil, uma solução por aproximação será preferível[2]. Então, primeiro encontre um certo ângulo B que esteja para um ângulo de 57,29578 graus, que um arco igual ao raio

subtende, como SH, a distância entre os focos, para AB, o diâmetro da elipse. Em segundo lugar, um certo comprimento L, que esteja para o raio inversamente na mesma razão. E estes tendo sido encontrados, o Problema pode ser resolvido pela seguinte análise. Por qualquer construção (ou mesmo por conjectura), suponha que conhecemos P, o lugar do corpo, próximo ao seu lugar verdadeiro, *p*. Então, fazendo incidir sobre o eixo da elipse a ordenada PR a partir da proporção dos diâmetros da elipse, a ordenada RQ do círculo circunscrito AQB será dada; tal ordenada é o seno do ângulo AOQ, supondo que AO é o raio, e também corte a elipse em P. Isto será suficiente se aquele ângulo for encontrado por um cálculo simples em números próximos da verdade. Suponha que também conheçamos o ângulo proporcional ao tempo, isto é, que está para quatro ângulos retos como o tempo no qual o corpo descreveu o arco A*p* está para o tempo de uma revolução na elipse. Seja N esse ângulo. Então tome um ângulo D, que esteja para o ângulo B como o seno do ângulo AOQ para o raio; e um ângulo E que esteja para o ângulo N - AOQ + D como o comprimento L para o mesmo comprimento L diminuído do co-seno do ângulo AOQ, quando aquele ângulo é menor do que um ângulo reto, ou aumentado dessa quantidade, quando maior. A seguir, tome um ângulo F que esteja para o ângulo B como o seno do ângulo AOQ + E para o raio, e um ângulo G que esteja para o ângulo N - AOQ - E + F como o comprimento L para o mesmo comprimen-

2. Ver Apêndice, nota 22.

to L diminuído do co-seno do ângulo AOQ + E, quando esse ângulo for menor do que um ângulo reto, ou aumentado dessa quantidade quando maior. Pela terceira vez, tome um ângulo H, que esteja para o ângulo B como o seno do ângulo AOQ + E + G para o raio; e um ângulo I que esteja para o ângulo N - AOQ - E - G + H, como o comprimento L está para o mesmo comprimento L diminuído do co-seno do ângulo AOQ + E + G, quando esse ângulo for menor do que um ângulo reto, ou aumentado dessa quantidade quando maior. E assim podemos prosseguir *in infinitum.* Finalmente, tome o ângulo AOq igual ao ângulo AOQ + E + G + I + etc., e, a partir de seu co-seno Or e de sua ordenada pr, que está para seu seno qr como o menor eixo da elipse para o maior, teremos p, o lugar verdadeiro do corpo. Quando o ângulo N - AOQ + D for negativo, o sinal + do ângulo E deverá ser trocado por - em todos os lugares, e o sinal - por + . E o mesmo deve ser feito com relação aos sinais dos ângulos G e I, quando os ângulos N - AOQ - E + F e N - AOQ - E - G + H forem negativos. Mas a série infinita AOQ + E + G + I + etc. converge tão rapidamente que raramente será necessário ir além do segundo termo E. O cálculo está fundamentado sobre este teorema: que a área APS varia como a diferença entre o arco AQ e a linha reta incidente, a partir do foco S, perpendicularmente sobre o raio OQ.

Por um cálculo semelhante, o Problema é resolvido para a hipérbole. Seja O o seu centro, A o seu vértice, S o seu foco e OK a assíntota; e suponha que a quantidade de área a ser destacada é conhecida, como sendo proporcional ao tempo. Seja essa quantidade A e, por conjectura, suponha que conheçamos a posição de uma linha reta SP, que destaca uma área APS, próxima do valor verdadeiro. Una OP e, a partir de A e P, em direção à assíntota, trace AI, PK, paralelamente à outra assíntota; e, pela tabela de logaritmos, a

área AIKP será obtida, igual também à área OPA, que subtraída do triângulo OPS, deixará a área APS destacada. E aplicando 2APS - 2A, ou 2A - 2APS, o dobro da diferença entre a área A que devia ser destacada, e a área APS que é destacada, à linha SN, que é traçada a partir do foco S perpendicularmente sobre a tangente TP, teremos o comprimento da corda PQ. Tal corda PQ deverá estar inscrita entre A e P, se a área APS que é destacada for maior do que a área A que devia ser destacada, mas, no caso contrário, no lado oposto do ponto P; e o ponto Q será, mais rigorosamente, o lugar do corpo. E repetindo o cálculo, o lugar poderá ser encontrado continuamente, com rigor cada vez maior.

E por tais cálculos, obtemos uma solução analítica geral para o problema. Mas o cálculo específico que segue é mais adequado para os propósitos astronômicos. Supondo que AO, OB, OD sejam os semi-eixos da elipse, L seu *latus rectum*, D a diferença entre o semi-eixo menor OD e a metade do *latus rectum*, L/2, encontre o ângulo Y, cujo seno está para o raio como o retângulo sob aquela diferença D, e AO + OD, a metade da soma dos eixos, para o quadrado do eixo maior AB. Encontre também um ângulo Z, cujo seno está para o raio como o dobro do retângulo sob a distância entre os focos SH e aquela diferença D estão para o triplo do quadrado da metade do semi-eixo maior AO. Uma vez encontrados aqueles ângulos, o lugar do corpo pode ser assim determinado. Tome o ângulo T proporcional ao tempo no qual o arco BP foi descrito, ou igual ao que é chamado de movimento médio; e tome um ângulo V, a primeira equação do movimento médio, para o ângulo Y, a primeira equação maior, como o seno do dobro do ângulo T está para o raio; e tome um ângulo X, a segunda equação maior, como o cubo do seno do ângulo T está para o cubo do raio. E então, tome o ângulo T está para o cubo do raio. Então, tome o ângulo BHP, o movimento equacionado médio, ou igual a T + X + V, a soma dos ângulos T, V, X, se o ângulo T é menor do que um ângulo reto, ou igual a T + X - V, a diferença dos

mesmos, se aquele ângulo T é maior do que um e menor do que dois ângulos retos; e se HP encontra a elipse em P, trace SP e ela destacará a área BSP, aproximadamente proporcional ao tempo.

Essa prática parece ser bastante rápida, devido ao fato de os ângulos V e X, tomados em frações de segundos, serem muito pequenos, sendo assim suficiente encontrar dois ou três dos seus primeiros valores. Mas ela é também suficientemente rigorosa para dar respostas à teoria dos movimentos dos planetas. Pois, mesmo na órbita de Marte, onde a maior equação do centro chega a dez graus, o erro raramente excederá um segundo. Mas quando o ângulo do movimento médio equacionado BHP é encontrado, o ângulo do movimento verdadeiro BSP e a distância SP são prontamente obtidos pelos métodos conhecidos.

E isso é o que tínhamos a dizer com relação ao movimento de corpos em linhas curvas. Mas também pode acontecer que um corpo móvel suba ou desça em uma linha reta, e agora prosseguirei explicando esses tipos de movimento.

» SEÇÃO VII

A subida e a descida retilíneas de corpos

PROPOSIÇÃO XXXII. PROBLEMA XXIV

Supondo que a força centrípeta seja inversamente proporcional ao quadrado da distância que os lugares guardam do centro, pede-se definir os espaços que um corpo, caindo diretamente, descreve em tempos dados.

CASO 1 – Se o corpo não cai perpendicularmente, descreverá (pelo Corolário I, Proposição XIII) uma seção cônica cujo foco está localizado no centro de força. Suponha que aquela seção cônica seja ARPB e S o seu foco. E, primeiro, se a figura for uma elipse, sobre o eixo maior AB, descreva o semicírculo ADB e trace a linha reta DPC passando pelo corpo em queda, fazendo ângulos retos com o eixo; e traçando DS, PS, a área ASD será proporcional à área ASP, e, portanto, também ao tempo. Mantendo ainda o eixo AB, faça a largura da elipse ser continuamente diminuída, e a área ASD permanecerá sempre proporcional ao

tempo. Suponha que aquela largura seja diminuída *in infinitum*; e a órbita APB, naquele caso coincidindo com o eixo AB, e o foco S com o ponto extremo do eixo B, o corpo descerá na linha reta AC, e a área ABD tornar-se-á proporcional ao tempo. Portanto, será encontrado o espaço AC, que o corpo descreve em um dado tempo por sua queda perpendicular a partir do lugar A, se a área ABD for tomada como proporcional ao tempo, e, a partir do ponto D, a linha reta DC for traçada perpendicularmente sobre a linha reta AB.Q.E.I.

CASO 2 – Se a figura RPB for uma hipérbole, no mesmo diâmetro principal AB descreva a hipérbole retangular BED; e porque existem relações entre as várias áreas e as alturas CP e CD,

$$CSP : CSD = CBfP : CBED = SPfB : SDEB = CP : CD,$$

e uma vez que a área SP*f*B varia como o tempo no qual o corpo P terá se movido através do arco P*f*B, a área SDEB também variará como aquele tempo. Diminua o *latus rectum* da hipérbole RPB *in infinitum*, mantendo o mesmo eixo transverso; e o arco PB coincidirá com a linha reta CB, e o foco S com o vértice B, e a linha reta SD com a linha reta BD. E, portanto, a área BDEB variará como o tempo no qual o corpo C, pela sua queda perpendicular, descreve a linha CB. Q.E.I.

CASO 3 – E, por argumento semelhante, se a figura RPB for uma parábola, e uma outra parábola BED for descrita para o mesmo vértice principal B, a qual possa permanecer sempre dada enquanto a primeira parábola, em cujo perímetro o corpo P se move, coincide com a linda CB ao ter seu *latus rectum* diminuído e reduzido a nada, o segmento parabólico BDEB variará como o tempo no qual aquele corpo P ou C descerá para o centro S ou B. Q.E.I.

Proposição XXXIII. Teorema IX

Supondo o que foi encontrado acima, afirmo que a velocidade de um corpo que cai em qualquer lugar C *está para a velocidade de um corpo que descreve um círculo em torno do centro* B, *à distância* BC, *como a raiz quadrada da razão de* AC, *a distância que o corpo guarda do vértice remoto* A *do círculo ou hipérbole retangular, para* AB/2, *o semidiâmetro principal da figura.*

Bisseccione AB, o diâmetro comum de ambas as figuras RPB, DEB, em O; então, trace a linha reta PT de modo a tocar a figura RPB em P, e da mesma maneira, corte aquele diâmetro comum AB (estendido, se necessário) em T; e faça SY ser perpendicular a essa linha, e BQ perpendicular a esse diâmetro, e suponha que o *latus rectum* da figura RPB seja L. A partir do Corolário IX, Proposição XVI, é evidente que a velocidade de um corpo, que se move na linha RPB em torno do centro S, em qualquer lugar P, está para a velocidade de um corpo que descreve um círculo em torno do mesmo centro, à distância SP, como a raiz quadrada da razão do retângulo ½ L.SP para SY^2. Pois, pelas propriedades das seções cônicas, AC.CB está para CP^2 como 2AO para L, e, portanto, $\frac{2CP^2.AO}{AC.CB}$ é igual a L.

Portanto, aquelas velocidades estão uma para a outra como a raiz quadrada da razão de $\frac{CP^2.AO.SP}{AC.CB}$ para SY^2. Além disso, pelas propriedades das seções cônicas,

$$CO : BO = BO : TO,$$

$$\text{daí, } CO + BO : BO = BO + TO : TO,$$

$$\text{e } CO : BO = CB : BT.$$

Donde,

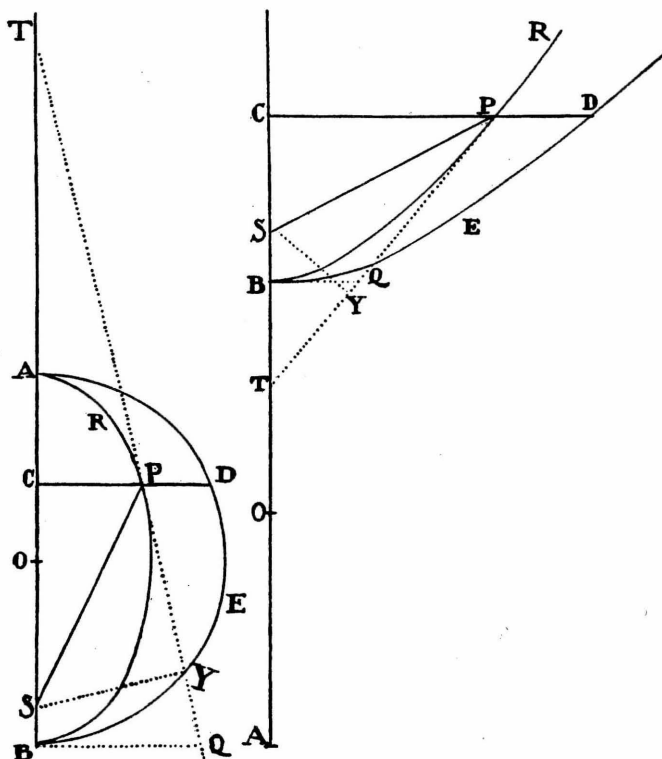
$$BO - CO : BO = BT - CB : BT$$

$$\text{e } AC : AO = TC : BT = CP : BQ;$$

$$\text{e, uma vez que } CP = \frac{BQ.AC}{AO}$$

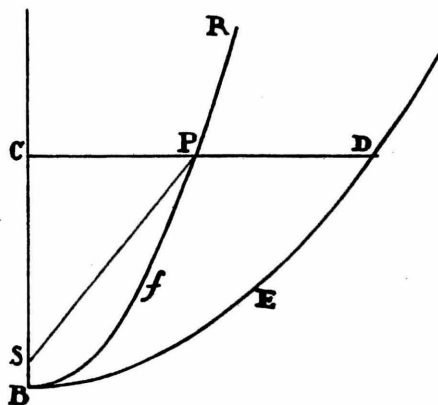
$$\text{obtém-se } \frac{CP^2.AO.SP}{AC.CB} \text{ igual a } \frac{BQ^2.AC.SP}{AO.BC}.$$

Agora suponha que CP, a largura da figura RPB, seja diminuída *in infinitum,* de forma que o ponto P possa vir a coincidir com o ponto C, o ponto S com o ponto B, e a linha SP com a linha BC, e a linha SY com a linha BQ; e a velocidade do corpo, agora descendo perpendicularmente na linha reta CB, estará para a velocidade de um corpo que descreve um círculo em torno do centro B, a uma distância BC, como a raiz quadrada da razão

de $\frac{BQ^2.AC.SP}{AO.BC}$ para SY^2, isto é (desprezando as razões de igualdade de SP para BC, e de BQ^2 para SY^2), como a raiz quadrada da razão de AC para o AO, ou AB/2. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Quando os pontos B e S vêm a coincidir, TC passará a estar para TS como AC para AO.

COROLÁRIO II – Um corpo que gira em qualquer círculo a uma dada distância do centro, subirá ao dobro de sua distância a partir do centro, se seu movimento for revertido para cima.

PROPOSIÇÃO XXXIV. TEOREMA X

Se a figura BED *for uma parábola, afirmo que a velocidade de um corpo que cai em qualquer lugar* C *é igual à velocidade pela qual um corpo pode uniformemente descrever um círculo em torno do centro* B *na metade do intervalo* BC.

Porque (pelo Corolário VII, Proposição XVI) a velocidade de um corpo que descreve uma parábola RPB em torno do centro S, em qualquer lugar P, é igual à velocidade de um corpo que descreve uniformemente um círculo em torno do mesmo centro S na metade do intervalo SP. Seja a largura CP da parábola diminuída *in infinitum*, de modo que o arco parabólico P*f*B possa vir a coincidir com a linha reta CB, o centro S com o vértice B, e o intervalo SP com o intervalo BC, e a Proposição será evidente. Q.E.D.

Proposição XXXV. Teorema XI

Mantidos os mesmos pressupostos, afirmo que a área da figura DES, *descrita pelo raio indefinido* SD, *é igual à área que um corpo, girando uniformemente em torno do centro* S, *com um raio igual à metade do* latus rectum *da figura* DES, *descreve no mesmo tempo.*

Suponha que um corpo C, no menor momento de tempo, descreva, ao cair, a linha infinitamente pequena C*c*, enquanto um outro corpo K, girando uniformemente em torno do centro S no círculo OK*k*, descreve o arco K*k*. Trace as perpendiculares CD, *cd*, encontrando a figura DES em D, *d*. Una SD, S*d*, SK, S*k*, e trace D*d* encontrando o eixo AS em T, e, a partir daí, levante a perpendicular SY.

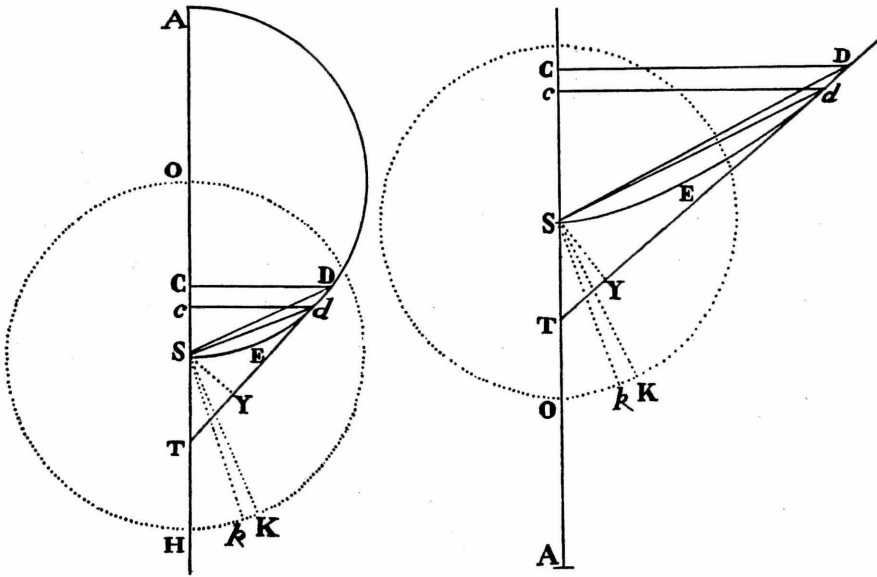
Caso 1 – Se a figura DES for um círculo, ou uma hipérbole retangular, biseccione seu diâmetro transverso AS em O. SO será metade do *latus rectum*. E como

$$TC : TD = Cc : Dd$$
$$\text{e } TD : TS = CD : Sy,$$
$$\text{então, } TC : TS = CD.Cc : SY.Dd.$$

Mas (pelo Corolário I, Proposição XXXIII)

$$TC : TS = AC : AO,$$

isto é, se na coalescência dos pontos D, *d*, são tomadas as razões últimas das linhas. Portanto,

$$AC : AO \text{ ou } SK = CD.Cc : SY.Dd.$$

Além disso, a velocidade do corpo que desce em C está para a velocidade de um corpo que descreve um círculo em torno do centro S, no intervalo SC, como a raiz quadrada da razão de AC para AO ou SK (pela Proposição XXXIII); e essa velocidade está para a velocidade de um corpo que descreve o círculo OK*k* como a raiz quadrada da razão de SK para SC (pelo Corolário VI, Proposição IV); e, conseqüentemente, a primeira velocidade está para a última, isto é, a pequena linha C*c* para o arco K*k*, como a raiz quadrada da razão de AC para SC, isto é, na razão de AC para CD. Portanto,

$$CD.Cc = AC.Kk,$$

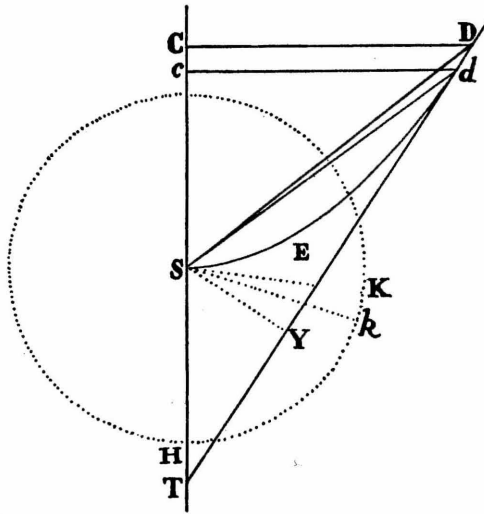
$$\text{assim, } AC : SK = AC.Kk : SY.Dd,$$

$$\text{e } SK.Kk = SY.Dd,$$

$$\text{e } \tfrac{1}{2} SK.Kk = \tfrac{1}{2} SY.Dd,$$

isto é, a área KS*k* é igual à área SD*d*. Portanto, em qualquer momento do tempo, duas partículas iguais de área*, KS*k* e SD*d*, são geradas, as quais, ten-

* Por "partícula de área" entende-se um elemento infinitesimal de área (N.T.).

do sua grandeza diminuída e seu número aumentado *in infinitum*, alcançam a razão de igualdade, e, conseqüentemente (pelo Corolário do Lema IV), todas as áreas geradas juntas serão sempre iguais. Q.E.D.

CASO 2 – Mas, se a figura DES for uma parábola, encontraremos, como acima,

$$CD.Cc : SY.Dd = TC : TS,$$

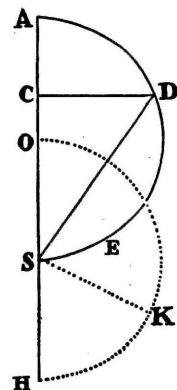
isto é, = 2 : 1; portanto,

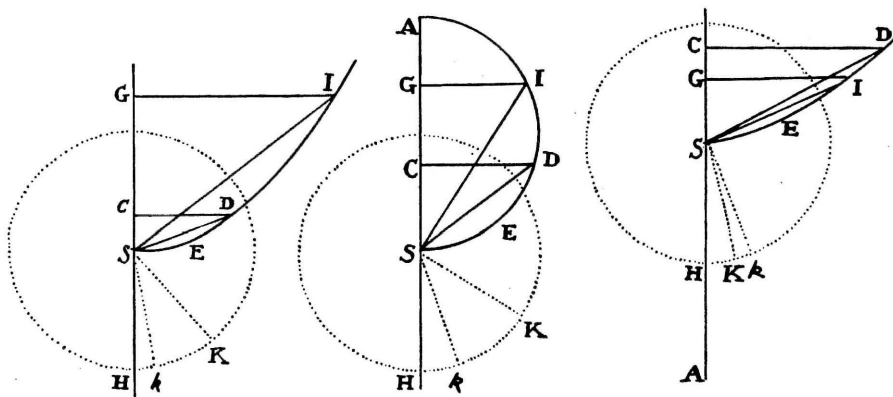
$$\tfrac{1}{4}\,CD.Cc = \tfrac{1}{2}\,SY.Dd.$$

Mas a velocidade do corpo que cai em C é igual à velocidade com a qual um círculo pode ser uniformemente descrito no intervalo ½ SC (pela Proposição XXXIV). E essa velocidade está para a velocidade com a qual um círculo pode ser descrito com o raio SK, isto é, a pequena linha C*c* para o arco K*k* (pelo Corolário VI, Proposição IV), como a raiz quadrada da razão de SK para ½ SC; isto é, na razão de SK para ½ CD. Portanto, ½ SK.K*k* é igual a ¼ CD.C*c* e assim, igual a ½ SY.D*d*; isto é, a área KS*k* é igual à área SD*d*, como acima. Q.E.D.

PROPOSIÇÃO XXXVI. PROBLEMA XXV

Determinar os tempos de descida de um corpo que cai a partir de um lugar dado A.

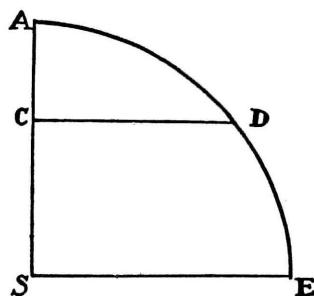
Sobre o diâmetro AS, a distância que o corpo guarda do centro no início, descreva o semicírculo ADS; de maneira semelhante, descreva o semicírculo OKH, em torno do centro S. A partir de qualquer lugar C do corpo, levante a ordenada CD. Una SD, e faça o setor OSK ser igual à área ASD. É evidente (pela Proposição XXXV) que o corpo ao cair descreverá o espaço AC no mesmo tempo em que um outro corpo, girando uniformemente em torno do centro S, pode descrever o arco OK. Q.E.F.

Proposição XXXVII. Problema XXVI

Definir os tempos de subida ou descida de um corpo projetado para cima ou para baixo a partir de um lugar dado.

Suponha que o corpo parta de um lugar dado G, na direção da linha GS, com qualquer velocidade. Tome GA para ½ AS como o quadrado da razão dessa velocidade para a velocidade uniforme em um círculo, com a qual o corpo pode girar em torno do centro S no intervalo dado SG. Se aquela razão for a mesma que a de 2 para 1, o ponto A é infinitamente remoto; neste caso, uma parábola deve ser descrita para o vértice S, com eixo SG e *latus rectum* qualquer, como resulta da Proposição XXXIV. Mas se aquela razão for menor ou maior do que a razão de 2 para 1, no primeiro caso deve ser descrito um círculo sobre o diâmetro SA, e uma hipérbole retangular no último caso, como resulta da Proposição XXXIII. Então, em torno do

centro S, com um raio igual à metade do *latus rectum*, descreva o círculo H*k*K; e no lugar G do corpo ascendente ou descendente, e em qualquer outro lugar C, levante as perpendiculares GI, CD, encontrando a seção ou o círculo em I e D. Então, unindo SI, SD, faça os setores HSK, HS*k* iguais aos segmentos SEIS, SEDS, e (pela Proposição XXXV), o corpo G descreverá o espaço GC no mesmo tempo no qual o corpo K pode descrever o arco K*k*. Q.E.F.

PROPOSIÇÃO XXXVIII. TEOREMA XII

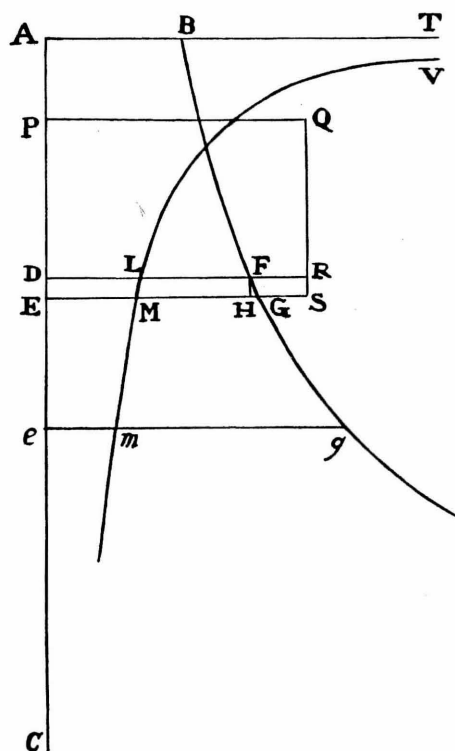
Supondo que a força centrípeta seja proporcional à altura ou distância dos lugares a partir do centro, afirmo que os tempos e as velocidades dos corpos que caem, e os espaços que eles descrevem, são respectivamente proporcionais aos arcos, aos senos e aos senos versos dos arcos.

Suponha que o corpo caia de qualquer lugar A na linha reta AS; e, em torno do centro de força S, com o raio AS, descreva o quadrante de um círculo AE; e seja CD o seno de qualquer arco AD; e o corpo A, ao cair durante o tempo AD, descreverá o espaço AC e, no lugar C, adquirá a velocidade CD. Isso é demonstrado da mesma forma, a partir da Proposição X, como a Proposição XXXII foi demonstrada a partir da Proposição XI.

COROLÁRIO I – Assim, os tempos nos quais um corpo que cai do lugar A chega ao centro S, e um outro corpo que gira descreve o arco quadrante ADE, são iguais.

COROLÁRIO II – Portanto, são iguais todos os tempos nos quais os corpos que caem de quaisquer lugares chegam ao centro. Pois todos os tempos periódicos de corpos que giram são iguais (pelo Corolário III, Proposição IV).

PROPOSIÇÃO XXXIX. PROBLEMA XXVII

Supondo uma força centrípeta de qualquer tipo, e admitindo as quadraturas de figuras curvilíneas, é requerido encontrar a velocidade de um corpo que sobe ou desce em uma linha reta, nos diversos lugares pelos quais ele passa, como também o tempo no qual ele chegará em qualquer lugar; e vice-versa.

Suponha que o corpo E caia de qualquer lugar A na linha reta ADEC; e, a partir de seu lugar E, imagine uma perpendicular EG sempre traçada proporcionalmente à força centrípeta naquele lugar, tendendo para o centro C; e seja BFG uma linha curva, o *locus* do ponto G. E, no início do movimento, suponha que EG coincida com a perpendicular AB; e a velocidade do corpo em qualquer lugar E será como uma linha reta cujo quadrado é igual à área curvilínea ABGE. Q.E.I.

Em EG, tome EM inversamente proporcional à linha reta cujo quadrado é igual à área ABGE, e seja VLM uma linha curva onde o ponto M está sempre localizado, e com relação à qual a linha reta AB estendida é uma assíntota; e o tempo no qual o corpo que cai descreve a linha AE será como a área curvilínea ABTVME. Q.E.I.

Na linha reta, tome a linha muito pequena DE de um dado comprimento, e seja DLF o lugar da linha EMG, quando o corpo estava em D; e, se a força centrípeta for tal que uma linha reta, cujo quadrado é igual à área ABGE, é como a velocidade do corpo descendente, a área propriamente dita será como o quadrado daquela velocidade; isto é, se para as velocidades

em D e E, escrevermos V e V + I, a área ABFD será como VV, e a área ABGE como VV + 2VI + II; e, por subtração, a área DFGE como 2VI + II, e, portanto, $\frac{DFGE}{DE}$ será como $\frac{2VI+II}{DE}$; isto é, se tomarmos as primeiras razões daquelas quantidades quando exatamente nascentes, o comprimento DF será como a quantidade $\frac{2VI}{DE}$, e, portanto, também como metade da quantidade $\frac{I.V}{DE}$. Mas o tempo no qual o corpo, ao cair, descreve a linha muito pequena DE é diretamente como aquela linha, e inversamente como a velocidade V; e a força será diretamente proporcional ao incremento I da velocidade e inversamente proporcional ao tempo; e, portanto, se tomarmos as primeiras razões quando aquelas quantidades são exatamente nascentes, como $\frac{I.V}{DE}$, isto é, como o comprimento DF. Portanto, uma força proporcional a DF ou EG fará o corpo descer com uma velocidade que é como a linha reta cujo quadrado é igual à área ABGE. Q.E.D.

Além disso, uma vez que o tempo no qual uma linha muito pequena DE, de um dado comprimento, pode ser descrita é inversamente como a velocidade, e, portanto, também inversamente como uma linha reta cujo quadrado é igual à área ABFD; e, uma vez que a linha DL e, por conseqüência, a área nascente DLME, será inversamente proporcional à mesma linha reta, o tempo será como a área DLME, e a soma de todos os tempos será como a soma de todas as áreas; isto é (pelo Corolário do Lema IV), o tempo total no qual a linha AE é descrita será como a área total ATVME. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Seja P o lugar a partir do qual um corpo deve cair, de modo que, quando impulsionado por qualquer força centrípeta uniforme conhecida (tal como normalmente se supõe que seja a gravidade), possa adquirir no lugar D uma velocidade igual à velocidade que um corpo, que cai por qualquer força, adquire naquele lugar D. Tome DR na perpendicular DF, tal que possa estar para DF como aquela força uniforme está para outra força no lugar D. Complete o retângulo PDRQ, e destaque a área ABFD, igual àquele retângulo. Então, A será o lugar a partir de onde o outro corpo caiu. Pois, completando o retângulo DRSE, uma vez que a área ABFD está para a área DFGE como VV para 2VI, e, portanto, como V/2 para I, isto é, como metade da velocidade total está para o incremento da velocidade do corpo que cai pela força variável; e, de maneira semelhante, a área PQRD está para a área DRSE como a metade da velocidade total para o incremento da velocidade do corpo que cai pela força uniforme; e, uma vez que aque-

les incrementos (devido à igualdade dos tempos nascentes) são como as forças geradoras, isto é, como as ordenadas DF, DR, e, conseqüentemente, como as áreas nascentes DFGE, DRSE; portanto, as áreas totais ABFD, PQRD estarão uma para a outra como as metades das velocidades totais; e, portanto, como as velocidades são iguais, elas tornar-se-ão também iguais.

COROLÁRIO II – Assim, se qualquer corpo for projetado tanto para cima como para baixo com uma dada velocidade, a partir de qualquer lugar D, e for considerada a lei de força centrípeta que age sobre ele, sua velocidade será encontrada em qualquer outro lugar, como *e*, levantando-se a ordenada *eg*, e tomando aquela velocidade para a velocidade no lugar D como uma linha reta cujo quadrado é igual ao retângulo PQRD – seja aumentado pela área curvilínea DF*ge*, se o lugar *e* está abaixo do lugar D, ou diminuído pela mesma área DF*ge*, se ele estiver mais alto – está para a linha reta cujo quadrado é igual apenas ao retângulo PQRD.

COROLÁRIO III – O tempo também é conhecido levantando-se a ordenada *em* inversamente proporcional à raiz quadrada de PQRD + ou - DF*ge*, e tomando o tempo no qual o corpo descreveu a linha D*e* para o tempo no

qual um outro corpo caiu com uma força uniforme a partir de P, e, ao cair, chegou a D, na proporção da área curvilínea DL*me* para o retângulo 2PD.DL. Pois o tempo no qual um corpo, que cai com uma força uniforme, descreveu a linha PD, está para o tempo no qual o mesmo corpo descreveu a linha PE como a raiz quadrada da razão PD para PE; isto é (a linha muito pequena DE sendo exatamente nascente), na razão de PD para PD + ½DE, ou 2PD para 2PD + DE, e, por subtração, para o tempo no qual o corpo descreveu a pequena linha DE, como 2PD para DE, e, portanto, como o retângulo 2PD.DL para a área DLME; e o tempo no qual ambos os corpos descreveram a linha muito pequena DE está para o tempo no qual o corpo, com movimento variável, descreveu a linha D*e*, como a área DLME para a área DL*me*; e, assim, o primeiro desses tempos mencionados está para o último como o retângulo 2PD.DL para a área DL*me*.

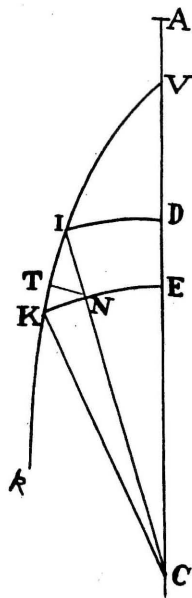
» SEÇÃO VIII

A determinação de órbitas nas quais os corpos circularão sob a ação de qualquer tipo de força centrípeta

PROPOSIÇÃO XL. TEOREMA XIII

Se um corpo, sob a ação de qualquer força centrípeta, é movido de qualquer maneira, e um outro corpo ascende ou descende em uma linha reta, e suas velocidades forem iguais em qualquer caso de altitudes iguais, suas velocidades serão iguais em todas as altitudes iguais.

Faça um corpo descer a partir de A, através de D e de E, até o centro C; e faça um outro corpo mover-se a partir de V na linha curva VIK*k*. A partir do centro C, com qualquer distância, descreva os círculos concêntricos DI, EK, encontrando a linha reta AC em D e E, e a curva VIK em I e K. Trace IC encontrando KE em N, e sobre IK incida a perpendicular NT; e faça o intervalo DE, ou IN, entre as circunferências dos círculos, muito pequeno; imagine que os corpos em D e I tenham velocidades iguais. Então, como as distâncias CD e CI são iguais, as forças centrípetas em D e I também serão iguais. Sejam aquelas forças expressas pelas linhas curtas e iguais DE e IN; e decomponha a força IN (pelo Corolário II das Leis do Movimento) em duas outras, NT e IT. Então, a força NT, agindo na direção da linha NT perpendicular ao caminho ITK do corpo, de modo algum afetará ou mudará a veloci-

dade do corpo naquele caminho, mas apenas o afastará de um curso retilíneo e o defletirá continuamente da tangente da órbita, fazendo-o prosseguir no caminho curvilíneo ITK*k*. Toda esta força, portanto, será despendida para produzir este efeito; mas a outra força, IT, agindo na direção do curso do corpo, será toda empregada para acelerá-lo, e no mínimo tempo dado, produzirá uma aceleração proporcional a si própria [IT]. Portanto, as acelerações dos corpos em D e I, produzidas em tempos iguais, são como as linhas DE, IT (se tomarmos as primeiras razões das linhas nascentes DE, IN, IK, IT, NT); e em tempos diferentes, como o produto daquelas linhas e dos tempos. Mas os tempos nos quais DE e IK são descritas são, devido às velocidades iguais (em D e I), como os espaços descritos DE e IK, e, portanto, as acelerações no curso dos corpos, através das linhas DE e IK, são como DE e IT, e DE e IK, conjuntamente; isto é, como o quadrado de DE para o retângulo IT.IK. Mas o retângulo IT.IK é igual ao quadrado de IN, isto é, igual ao quadrado de DE; e, portanto, as acelerações geradas no trânsito dos corpos dos lugares D e I para os lugares E e K são iguais. Portanto, as velocidades dos corpos em E e K também são iguais: e, pelo mesmo raciocínio, elas sempre serão iguais em quaisquer distâncias iguais subseqüentes. Q.E.D.

Pelo mesmo raciocínio, corpos com iguais velocidades e que estejam a iguais distâncias do centro serão igualmente retardados em sua ascensão para distâncias iguais. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, se um corpo oscilar pendurado a uma corda ou for, por qualquer impedimento polido e perfeitamente liso, forçado a mover-se em uma linha curva; e outro corpo ascender ou descender em uma linha reta, e suas velocidades forem iguais em qualquer altitude igual, suas velocidades serão também iguais em todas as outras altitudes iguais. Pois, pela corda do corpo pendular ou pelo impedimento das paredes de um recipiente perfeitamente liso, o mesmo acontecerá como se fosse *produzido* pela força transversal NT. O corpo não é nem acelerado nem retardado por ela, mas apenas obrigado a deixar seu curso retilíneo.

COROLÁRIO II – Suponha que a quantidade P seja a maior distância a partir do centro para a qual um corpo pode ascender, seja oscilando ou circulando em uma curva, e suponha também que o mesmo corpo seja projetado para cima a partir de qualquer ponto de uma curva, com a velocidade que

ele tem naquele ponto. Seja a quantidade A a distância do corpo a partir do centro em qualquer outro ponto da órbita; e seja a força centrípeta sempre como a potência A^{n-1}, da quantidade A, o índice de cuja potência, $n - 1$, é qualquer número n menos a unidade. Então, a velocidade em cada altitude A será como $\sqrt{(P^n - A^n)}$, e, portanto, dada. Pois pela Proposição XXXIX, a velocidade de um corpo ascendendo ou descendendo em uma linha reta está naquela exata razão.

PROPOSIÇÃO XLI. PROBLEMA XXVIII

Supondo uma força centrípeta de qualquer tipo e admitindo as quadraturas e figuras curvilíneas; é requerido encontrar tanto as curvas nas quais os corpos mover-se-ão, como os tempos de seus movimentos nas curvas encontradas.

Faça qualquer força centrípeta tender para o centro C e suponha que seja requerido encontrar a curva VIK*k*. Seja dado o círculo VR, descrito em torno do centro C com qualquer raio CV; e, a partir do mesmo centro, descreva quaisquer outros círculos ID, KE, cortando a curva em I e K, e a linha reta CV em D e E. Então trace a linha reta CNIX cortando os círculos KE, VR em N e X, e a linha reta CKY encontrando o círculo VR em Y. Faça os pontos I e K indefinidamente próximos; e faça o corpo ir de V até *k*, através de I e de K; e o ponto A ser o lugar a partir do qual outro corpo deve

incidir, tal que no lugar D tenha adquirido uma velocidade igual à velocidade do primeiro corpo em I. E se tudo permanecer como na Proposição XXXIX, a linha curta IK, descrita no mínimo tempo dado, será como a velocidade e, portanto, como a linha reta cujo quadrado é igual à área ABFD, e o triângulo ICK, proporcional ao tempo, estará dado, e, portanto, KN será inversamente como a altitude IC; isto é (se for dada qualquer quantidade Q, e a altitude IC for chamada de A), como Q/A. Chame essa quantidade Q/A de Z, e suponha que a grandeza de Q seja tal que, em algum caso,

$$\sqrt{ABFD} : Z = IK : KN,$$

e, então, em todos os casos,

$$\sqrt{ABFD} : Z = IK : KN,$$

e

$$ABFD : ZZ = IK^2 : KN^2,$$

e, por subtração,

$$ABFD - ZZ : ZZ = IN^2 : KN^2,$$

e, portanto,

$$\sqrt{(ABFD\text{-}ZZ)} : Z \text{ ou } Q/A = IN : KN,$$

e

$$A.KN = \frac{Q.IN}{\sqrt{(ABFD\text{-}ZZ)}}.$$

Uma vez que

$$YX.XC : A.KN = CX^2 : AA,$$

segue que

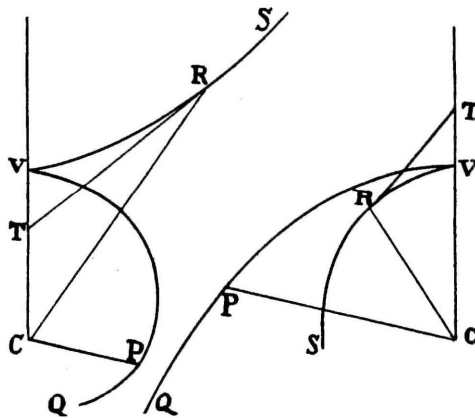
$$YX.XC = \frac{Q.IN.CX^2}{AA\sqrt{(ABFD\text{-}ZZ)}}.$$

Portanto, na perpendicular DF, tome continuamente D*b*, D*c* iguais a $\frac{Q}{2\sqrt{(ABFD\text{-}ZZ)}}$, $\frac{Q.CX^2}{2AA\sqrt{(ABFD\text{-}ZZ)}}$, respectivamente, e descreva as linhas curvas *ab*, *ac*, os focos dos pontos *b* e *c*; e a partir do ponto V, levante a perpendicular V*a* até a linha AC, destacando as áreas curvilíneas VD*ba*, VD*ca*, e também levante as ordenadas E*z*, E*x* também. Então, como o retângulo D*b*.IN ou D*bz*E é igual à metade do retângulo A.KN, ou ao triângulo ICK; e o retângulo D*c*.IN ou D*cx*E é igual à metade do retângulo YX.XC, ou ao triângulo XCY; isto é, porque as partículas nascentes D*bz*E, ICK das áreas VD*ba*, VIC são sempre iguais; e as partículas nascentes D*cx*E, XCY das áreas VD*ca*, VCX são sempre iguais, portanto, a área gerada VD*ba* será igual à área gerada VIC e, assim, proporcional ao tempo; e a área gerada VD*ca* é igual ao setor gerado VCX. Se, portanto, fornecermos um tempo qualquer du-

rante o qual o corpo esteve se movendo a partir de V, também será dada a área proporcional a ele, VD*ba*; e assim, a altitude CD ou CI do corpo será dada; e a área VD*ca* e o setor VCX igual a ela, junto com seu ângulo VCI. Mas se o ângulo VCI e a altitude CI são dados, também é dado o lugar I no qual o corpo será encontrado ao final daquele tempo. Q.E.I.

Corolário I – Assim, as altitudes maior e menor dos corpos, isto é, as apsides* das curvas, podem ser encontradas muito facilmente. Pois as apsides são aqueles pontos nos quais uma linha reta IC, traçava através do centro, incide perpendicularmente sobre as curvas VIK, por onde passa [IC] quando as linhas retas IK e NK tornam-se iguais; isto é, quando a área ABFD é igual a ZZ.

Corolário II – Assim também o ângulo KIN, com o qual a curva corta a linha IC em qualquer lugar, pode ser prontamente encontrado pela altitude dada IC do corpo; isto é, fazendo o seno daquele ângulo estar para o raio como KN para IK, isto é, como Z para a raiz quadrada da área ABFD.

Corolário III – Se for descrita uma seção cônica VRS para o centro C e vértice principal V; e, a partir de qualquer ponto dali, como R, for traçada a tangente RT encontrando o eixo CV, indefinidamente estendido, no ponto T; então se, unindo CR, for traçada a linha reta CP, igual à abcissa CT, fazendo um ângulo VCP proporcional ao setor VCR; e se uma força centrípeta inversamente proporcional aos cubos das distâncias dos lugares a partir do centro, tende para o centro C; e a partir do lugar V for lançado um corpo com uma exata velocidade na direção de uma linha perpendicular à linha reta CV; este corpo prosseguirá em uma curva VPQ, a qual sempre

* Ponto de máximo ou mínimo afastamento da órbita de um astro, a partir de seu centro de atração (N.T.).

tocará o ponto P; e, portanto, se a seção cônica VRS for uma hipérbole, o corpo descerá para o centro; mas se ela for uma elipse, ele ascenderá continuamente e se afastará cada vez mais *in infinitum*. E, ao contrário, se um corpo dotado de uma velocidade qualquer parte do lugar V e, dependendo se ele começa a descer obliquamente para o centro, ou a ascender obliquamente a partir dele, sendo a figura VRS uma hipérbole ou uma elipse, a curva pode ser obtida aumentando-se ou diminuindo-se o ângulo VCP em uma dada razão. E a força centrípeta tornando-se centrífuga, o corpo ascenderá obliquamente na curva VPQ, que é encontrada tomando-se o ângulo VCP proporcional ao setor elíptico VRC, e o comprimento CP igual ao comprimento CT, como antes. Tudo isso decorre da Proposição que segue, pela quadratura de uma certa curva, cuja invenção, por ser bastante fácil, e para ser breve, omito.

Proposição XLII. Problema XXIX

Sendo dada a lei da força centrípeta, é requerido encontrar o movimento de um corpo que parte de um lugar dado, com uma dada velocidade, na direção de uma dada linha reta.

Suponha as mesmas coisas como nas três Proposições precedentes; faça o corpo partir de um lugar I na direção da pequena linha IK, com a

mesma velocidade que um outro corpo, caindo com uma força centrípeta uniforme a partir do lugar P, pode adquirir em D; e faça essa força uniforme estar para a força com a qual o corpo é primeiramente impulsionado em I, como DR para DF. Faça o corpo prosseguir na direção de *k*; e, em torno do centro C, com o raio C*k*, descreva um círculo *ke*, encontrando a linha reta PD em *e*, e levante as linhas *eg*, *ev*, *ew*, ordenadamente aplicadas às curvas BF*g*, *abv*, *acw*. A partir do retângulo dado PDRQ e da lei de força centrípeta dada, pela qual o primeiro corpo é impulsionado, a linha curva BF*g* é também dada, pela construção da Proposição XXVII, e seu Corolário I. Então, a partir do ângulo dado CIK, é fornecida a proporção das linhas nascentes IK, KN; e, assim, pela construção do Problema XXVIII, é dada a quantidade Q, com as linhas curvas *abv*, *acw*; e, portanto, ao fim de qualquer tempo D*bve*, são conhecidos tanto a altitude C*e* ou C*k* do corpo, como a área D*cwe*, com o setor XC*y* igual a ela, o ângulo IC*k* e o lugar *k*, no qual o corpo será então encontrado. Q.E.I.

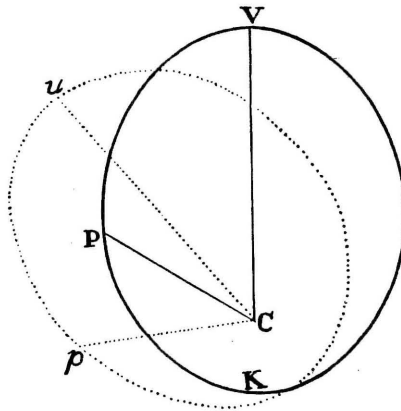
Supomos nessas Proposições que a força centrípeta varia no recuo a partir do centro de acordo com alguma lei, a qual qualquer um pode imaginar à vontade, mas que a iguais distâncias do centro é sempre a mesma em qualquer lugar.

Até aqui, considerei os movimentos de corpos em órbitas imóveis. Resta agora acrescentar alguma coisa referente a seus movimentos em órbitas que giram em torno de centros de força.

» SEÇÃO IX

O movimento de corpos em órbitas móveis e o movimento das apsides

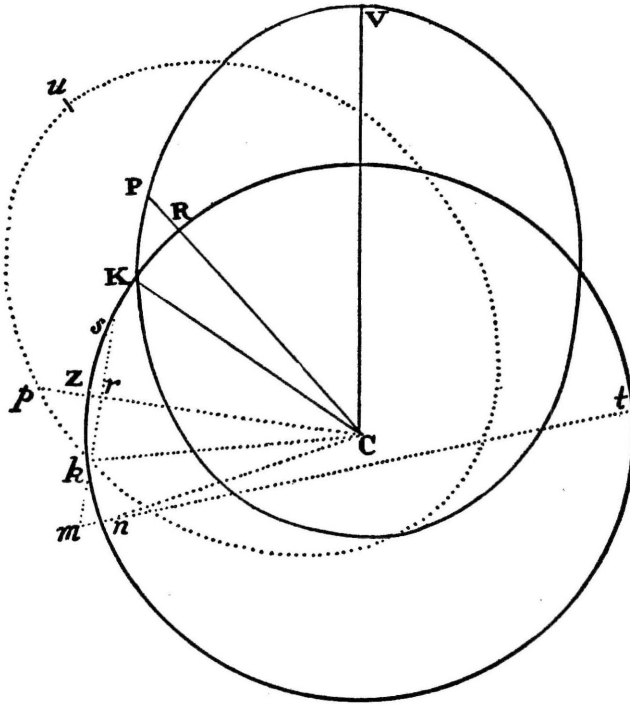
PROPOSIÇÃO XLIII. PROBLEMA XXX

É requerido mover um corpo em uma curva que gira em torno do centro de força da mesma maneira que um outro corpo na mesma curva em repouso.

Na órbita fixa VPK, faça o corpo P girar, vindo de V para K. A partir do centro C trace Cp continuamente, igual a CP, fazendo o ângulo VCp pro-

porcional ao ângulo VCP; e a área que a linha C*p* descreve estará para a área VCP, que a linha CP descreve ao mesmo tempo, como a velocidade da linha C*p* para a velocidade da linha CP; isto é, como o ângulo VC*p* para o ângulo VCP, portanto, em uma dada razão, e, assim, proporcional ao tempo. Então, uma vez que a área descrita pela linha C*p* em um plano fixo é proporcional ao tempo, fica evidente que um corpo, sob a ação de uma força centrípeta adequada, pode girar com o ponto *p* na linha curva que o mesmo ponto *p*, pelo método há pouco explicado, pode descrever em um plano fixo. Faça o ângulo VC*u* igual ao ângulo PC*p* e a linha C*u* igual a CV, e a figura *u*C*p* igual à figura VCP, e o corpo, estando sempre no ponto *p*, mover-se-á no perímetro da figura girante *u*C*p*, e descreverá seu arco (girante) *up* no mesmo tempo que o outro corpo P descreve o arco similar e igual VP na figura fixa VPK. Encontre, então, pelo Corolário V, Proposição VI, a força centrípeta pela qual se pode fazer o corpo girar na linha curva que o ponto *p* descreve em um plano fixo, e o Problema estará resolvido. Q.E.F.

Proposição XLIV. Teorema XIV

A diferença das forças, pelas quais pode-se fazer dois corpos moverem-se igualmente, um deles em uma órbita fixa, e o outro na mesma órbita girante, varia inversamente como cubo de suas altitudes comuns.

Sejam VP, PK as partes da órbita fixa, semelhantes e iguais às partes da órbita girante, *up*, *pk*; e suponha que a distância dos pontos P e K seja a menor possível. Faça incidir uma perpendicular *kr* a partir do ponto *k* na linha reta *p*C, e estenda-a até *m*, de modo que *mr* esteja para *kr* como o ângulo VC*p* para o ângulo VCP. Como as altitudes dos corpos, PC e *p*C, KC e *k*C, são sempre iguais, é evidente que os incrementos ou decrementos das linhas PC e *p*C são sempre iguais; e, portanto, se cada um dos vários movimentos dos corpos nos lugares P e *p* forem decompostos em dois (pelo Corolário II das Leis do Movimento), um deles está dirigido para o centro, ou de acordo com as linhas PC, *p*C, e o outro, transversal ao primeiro, tem uma direção perpendicular às linhas PC e *p*C; os movimentos em direção ao centro serão iguais, e o movimento transversal do corpo *p* estará para o movimento transversal do corpo P como o movimento angular da linha *p*C para o movimento angular da linha PC; isto é, como o ângulo VC*p* para o ângulo VCP. Portanto, ao mesmo tempo que o corpo P, por seus dois movimentos, chega ao ponto K, o corpo *p*, tendo um movimento igual em direção ao centro, será

igualmente movido de p para C; e, portanto, ao final daquele tempo, será encontrado em algum lugar na linha reta mkr, a qual, passando pelo ponto k, é perpendicular à linha pC; e, por seu movimento transversal, alcançará uma distância da linha pC que estará para a distância que o outro corpo P alcança da linha PC, como o movimento transversal do corpo p para o movimento transversal do outro corpo P. Portanto, uma vez que kr é igual à distância que o corpo P alcança da linha PC, e mr está para kr como o ângulo VCp para o ângulo VCP, isto é, como o movimento transversal do corpo p para o movimento transversal do corpo P, é evidente que o corpo p, ao final daquele tempo, será encontrado no lugar m. Isto ocorrerá se os corpos p e P forem igualmente movidos nas direções das linhas pC e PC, e forem, portanto, impelidos por forças iguais naquelas direções. Mas, se tomarmos um ângulo pCn que está para o ângulo pCk como o ângulo VCp para o ângulo VCP, e nC for igual a kC, nesse caso o corpo p, ao final do tempo, realmente estará em n; e é, portanto, impelido com uma força maior do que a que impele o corpo P, se o ângulo nCp for maior do que o ângulo kCp, isto é, se a órbita upk mover-se progressivamente, ou em uma direção retrógrada, com uma velocidade maior do que o dobro daquela com a qual a linha CP é deslocada

para a frente; e com uma força menor, se o movimento retrógrado da órbita for mais lento. E a diferença das forças será como o intervalo *mn* dos lugares através dos quais o corpo seria conduzido sob ação daquela diferença, naquele dado espaço de tempo. Em torno do centro C, com o intervalo C*n* ou C*k*, suponha um círculo descrito cortando as linhas *mr*, *mn* estendidas em *s* e *t*, e o retângulo *mn.mt* será igual ao retângulo *mk.ms*, e, portanto, *mn* será igual a $\frac{mk.ms}{mt}$. Mas, uma vez que os triângulos *p*C*k*, *p*C*n*, em um dado tempo, são de uma dada grandeza, *kr* e *mr*, e sua diferença *mk*, e sua soma *ms*, são inversamente como a altitude *p*C, portanto, o retângulo *mk.ms* é inversamente como o quadrado da altitude *p*C. Além disso, *mt* é diretamente proporcional a $\frac{mt}{2}$, isto é, como a altitude *p*C. Essas são as primeiras razões das linhas nascentes; e, assim, $\frac{mk.ms}{mt}$ isto é, a linha nascente curta *mn*, e a diferença das forças proporcionais a ela, são inversamente como o cubo da altitude *p*C. Q.E.D.

Corolário I – Assim, a diferença das forças nos lugares P e *p*, ou K e *k*, está para a força com a qual um corpo pode girar com um movimento circular de R para K, no mesmo tempo em que o corpo P, em uma órbita fixa, descreve o arco PK, como a linha nascente *mn* está para o seno verso do arco nascente RK, isto é, como $\frac{mk.ms}{mt}$ para $\frac{rk^2}{2kC}$, ou como *mk.ms* para o quadrado de *rk*; isto é, se tomarmos quantidades dadas F e G, uma para a outra, na mesma razão que o ângulo VCP guarda para o ângulo VC*p*, como GG - FF para FF. E, portanto, se a partir do centro C, com qualquer distância CP ou C*p*, for descrito, em um dado tempo, um setor circular igual à área total VPC, que o corpo descreveu girando em uma órbita fixa, através de um raio traçado até o centro, a diferença das forças, com as quais o corpo P gira numa órbita fixa, e o corpo *p* numa órbita móvel, estará para a força centrípeta, com a qual um outro corpo, por um raio traçado até o centro, pode descrever uniformemente aquele setor no mesmo tempo em que a área VPC é descrita, como GG - FF para FF. Pois aquele setor e a área *p*C*k* estão um para o outro como os tempos em que são descritos.

Corolário II – Se a órbita VPK for uma elipse, tendo foco C e apside maior V, e a elipse *upk* for suposta similar e igual a ela, tal que *p*C possa ser sempre igual a PC, e o ângulo VC*p* estiver para o ângulo VCP na razão dada de G para F; e se tomarmos a altitude PC, ou *p*C, por A, e o *latus rectum* da elipse por 2R, a força com a qual se pode girar um corpo numa elipse móvel

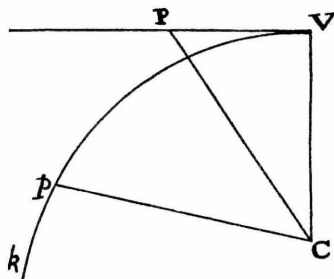
será como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, e vice-versa. Seja a força com a qual um corpo pode girar em uma elipse fixa expressa pela quantidade $\frac{FF}{AA}$, e força em V será $\frac{FF}{CV^2}$. Mas a força com a qual um corpo pode girar em um círculo à distância CV, com a mesma velocidade que um corpo girando em uma elipse tem em V, está para a força que atua sobre um corpo girando em uma elipse quando ele está na apside V, como a metade do *latus rectum* da elipse está para o semidiâmetro, e, portanto, é como $\frac{RFF}{CV^3}$; e a força que está para essa como GG - FF para FF, é como $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$; e essa força (pelo Corolário I desta Proposição) é a diferença das forças em V, com as quais o corpo P gira na elipse fixa VPK, e o corpo *p* na elipse móvel *upk*. Então, uma vez que por esta Proposição, aquela diferença em qualquer altitude A está para si mesma na altitude CV como $\frac{1}{A^3}$ para $\frac{1}{CV^3}$, a mesma diferença em qualquer altitude A será como $\frac{RGG - RFF}{A^3}$. Portanto, à força $\frac{FF}{AA}$, pela qual o corpo

pode girar em uma elipse fixa VPK, acrescente o excesso $\frac{RGG - RFF}{A^3}$, e a soma será a força total $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, pela qual um corpo pode girar, no mesmo tempo, na elipse móvel *upk*.

COROLÁRIO III – Da mesma forma será encontrado que, se a órbita fixa VPK for uma elipse, com seu centro no centro de forças C, e for concebida uma elipse móvel *upk*, semelhante, igual e concêntrica a ela; e 2R for o *latus rectum* principal daquela elipse, e 2T o *latus transversum* ou eixo maior; e o ângulo VC*p* estiver continuamente como o ângulo VCP como G para F; as forças com as quais corpos podem girar nas elipses fixa e móvel, em tempos iguais, serão como $\frac{FFA}{T^3}$ e $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, respectivamente.

COROLÁRIO IV – E universalmente, se chamarmos de T a altitude maior CV do corpo, e de R, o raio de curvatura que a órbita VPK tem em V, isto é, o raio de um círculo igualmente curvo, e se a força centrípeta com a qual um corpo pode girar em qualquer curva fixa VPK no lugar V, for denotada por $\frac{VFF}{TT}$, e, em outros lugares, P for indefinidamente chamado de X; e a altitude CP for denotada por A, e G for tomado para F na razão dada do ângulo VC*p* para o ângulo VCP; a força centrípeta com a qual o mesmo corpo realizará os mesmos movimentos no mesmo tempo, na mesma curva *upk*, girando com um movimento circular, será como a soma das forças $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$.

COROLÁRIO V – Portanto, sendo dado o movimento de um corpo em uma órbita fixa, seu movimento angular em torno do centro de forças pode ser aumentado ou diminuído em uma dada razão; e, assim, novas órbitas fixas podem ser obtidas, nas quais os corpos podem girar com novas forças centrípetas.

COROLÁRIO VI – Portanto, se for traçada a linha VP de um comprimento indeterminado, perpendicularmente à linha CV dada em posição, e

CP for traçada, e também C*p* igual a ela, fazendo o ângulo VC*p* ter uma razão dada para com o ângulo VCP, a força com a qual um corpo pode girar na linha curva V*pk*, que o ponto *p* está continuamente descrevendo, será inversamente proporcional ao cubo da altitude C*p*. Pois o corpo P, somente por sua inércia, com nenhuma outra força impedindo-o, prosseguirá uniformemente na linha reta VP. Acrescente, então, uma força que tende para o centro C inversamente como o cubo da altitude CP ou C*p*, e (pelo que foi há pouco demonstrado) o corpo será defletido do movimento retilíneo para a linha curva V*pk*. Mas essa curva V*pk* é a mesma que a curva VPQ encontrada no Corolário III, Proposição XLI, em que afirmei que corpos atraídos com tais forças ascenderiam obliquamente.

Proposição XLV. Problema XXXI

Encontrar o movimento das apsides em órbitas que se aproximam muito de círculos[1].

Esse problema é resolvido aritmeticamente reduzindo-se a órbita que um corpo, girando em uma elipse móvel (como nos Corolários II e III da Proposição anterior), descreve em um plano fixo, à figura da órbita cujas apsides são requeridas; e, então, procurando as apsides da órbita que aquele corpo descreve em um plano fixo. Mas órbitas adquirem a mesma forma se as forças centrípetas com as quais elas são descritas, comparadas entre si, forem proporcionais em altitudes iguais. Seja o ponto V a apside maior, e sejam T a maior altitude CV, A para qualquer outra altitude CP ou C*p*, e X a diferença das altitudes, CV - CP; e a força com a qual um corpo se move em uma elipse que gira em torno de seu foco C (como no Corolário II), a qual no Corolário II, era como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A^3}$, isto é, como $\frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$, substituindo A por T - X, tornar-se-á como $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3}$. Da mesma maneira, qualquer outra força centrípeta deve ser reduzida a uma fração cujo denominador é A^3, e os numeradores devem ser análogos pela comparação dos termos homólogos. Isso ficará mais claro pelos Exemplos.

Exemplo 1 – Suponha que a força centrípeta seja uniforme, e, portanto, como $\frac{A^3}{A^3}$, ou, substituindo A por T - X no numerador, como

1. Nota 23 do Apêndice.

$\frac{T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3}{A^3}$. Então, confrontando os termos correspondentes dos numeradores, isto é, aqueles que consistem de quantidades dadas com aqueles de quantidades dadas, e aqueles de quantidades não dadas com aqueles de quantidades não dadas, tornar-se-á

$$RGG - RFF + TFF : T^3 = -FFX : 3TTX + 3TXX - X^3$$
$$= -FF : 3TT + 3TX - XX.$$

Agora, uma vez que se supõe que a órbita fosse extremamente parecida com um círculo, faça-a coincidir com um círculo; e como, neste caso R e T tornam-se iguais, e X é infinitamente diminuído, as últimas razões serão

$$GG : T^2 = -FF : -3TT$$

e, novamente, $GG : FF = TT : 3TT = 1 : 3$;

e, portanto, G está para F, isto é, o ângulo VC*p* está para o ângulo VCP como 1 para $\sqrt{3}$. Portanto, uma vez que o corpo, em uma elipse fixa, ao descer da apside superior, descreve um ângulo, se posso assim dizer, de 180°, o outro corpo em uma elipse móvel e, portanto, no plano fixo do qual estamos tratando, descreverá na sua descida da apside superior para a inferior, um ângulo VC*p* de $\frac{180°}{\sqrt{3}}$. E isso acontecerá em razão da semelhança dessa órbita que um corpo descreve sob a ação de uma força centrípeta uniforme, com aquela órbita que um corpo, realizando seus circuitos em uma elipse girante, descreverá em um plano fixo. Por essa confrontação dos termos, essas órbitas tornam-se similares; é certo que não universalmente, mas apenas quando elas se aproximam muito de uma figura circular. Portanto, um corpo girando sob a ação de uma força centrípeta uniforme em uma órbita aproximadamente circular, sempre descreverá um ângulo de $\frac{180°}{\sqrt{3}}$, ou 103°55'23", no centro; movendo-se da apside superior para a inferior quando ele já descreveu uma vez aquele ângulo, e, assim, retornando à apside superior quando ele descreveu novamente aquele ângulo; e assim por diante, *in infinitum.*

EXEMPLO 2 – Suponha que a força centrípeta seja uma potência qualquer da altitude A, como, por exemplo, A^{n-3} ou $\frac{A^n}{A^3}$, onde $n - 3$ e n *significam* quaisquer índices de potências, inteiras ou fracionárias, racionais ou irracionais, positivas ou negativas. Aquele numerador A^n ou $(T - X)^n$, sendo reduzido a uma série indeterminada por meu método de séries convergentes, tornar-se-á $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} . XXT^{n-2}$ etc.

E comparando esses termos com os termos do outro numerador

$$RGG - RFF + TFF - FFX,$$

torna-se-á $RGG - RFF + TFF : T^n = -FF : -nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ etc.

E tomando as últimas razões em que as órbitas se aproximam de círculos, tornar-se-á

$$RGG : T^n = -FF : -nT^{n-1},$$

$$\text{ou, } GG : T^{n-1} = FF : nT^{n-1},$$

$$\text{e, novamente, } GG : FF = T^{n-1} : nT^{n-1} = 1 : n;$$

e, portanto, G está para F, isto é, o ângulo VC*p* para o ângulo VCP, como 1 para $\sqrt{n}$. Portanto, uma vez que o ângulo VCP, descrito quando o corpo desce da apside superior para a inferior em uma elipse, é de 180°, o ângulo VC*p*, descrito quando o corpo desce da apside superior para a inferior em uma órbita aproximadamente circular que um corpo descreve com uma força centrípeta proporcional à potência A^{n-3}, será igual a um ângulo de $\frac{180°}{\sqrt{n}}$, e sendo esse ângulo repetido, o corpo retornará da apside inferior para a superior, e assim por diante, *in infinitum.* Como, se a força centrípeta fosse como a distância do corpo até o centro, isto é, como A, ou $\frac{A^4}{A^3}$, n será 4 e $\sqrt{n}$ será 2; e, portanto, o ângulo entre as apsides superior e inferior será de $\frac{180°}{2}$, ou 90°. Assim, tendo o corpo realizado uma quarta parte de uma revolução, chegará à apside inferior, e, tendo realizado uma outra quarta parte, chegará à apside superior, e assim por diante, *in infinitum.* Isso resulta também da Proposição X. Pois um corpo sob a ação dessa força centrípeta girará em uma elipse fixa, cujo centro é o centro de força. Se a força centrípeta for inversamente como a distância, isto é, diretamente proporcional a $\frac{1}{A}$ ou $\frac{A^2}{A^3}$, n será igual a 2; e, portanto, o ângulo entre as apsides superior e inferior será de $\frac{180°}{\sqrt{2}}$ ou 127°16'45"; e, assim, um corpo girando com tal força, por uma repetição contínua desse ângulo, mover-se-á alternadamente da apside superior para a inferior e da inferior para a superior para sempre. Assim, também, se a força centrípeta for inversamente proporcional à raiz quarta da undécima potência da altitude, isto é, inversamente como $A^{11/4}$, e, portanto, diretamente como $\frac{1}{A^{11/4}}$ ou a $\frac{A^{1/4}}{A^3}$, n será igual a ¼ e $\frac{180°}{\sqrt{n}}$ será igual a 360°; e, portanto, um corpo que parte da apside superior e, a partir

daí continuamente descendo, chegará à apside inferior quando tiver completado uma revolução; e, assim, subindo continuamente, quando tiver completado uma outra revolução, chegará novamente à apside superior; e assim alternadamente para sempre.

EXEMPLO 3 – Tomando m e n como índices quaisquer das potências da altitude, e b e c como números dados quaisquer, suponha que a força centrípeta seja como $\frac{bA^m+cA^n}{A^3}$, isto é, como $\frac{b(T-X)^m+c(T-X)^n}{A^3}$ ou (pelo método de série convergente, mencionado acima) como $[bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} \cdot bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} - cXXT^{n-2}$ etc.$] \div A^3$; e comparando os termos dos numeradores, resultará $RGG - RFF + TFF : bT^m + cT^n = -FF : -mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} \cdot bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} \cdot cXT^{n-2}$ etc.

E tomando as últimas razões obtidas quando as órbitas reduzem-se a uma forma circular, resultará $GG : bT^{m-1} + cT^{n-1} = FF : mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$; e novamente, $GG : FF = bT^{m-1} + cT^{n-1} : mbT^{n-1} + ncT^{n-1}$.

Essa proporção, por expressar a maior altitude CV ou T aritmeticamente pela unidade, torna-se $GG : FF = b + c : mb + nc = 1 : \frac{mb+nc}{b+c}$ Por essa razão, G estará para F, isto é, o ângulo VCp para o ângulo VCP, como 1 para $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. E, portanto, uma vez que o ângulo VCP entre as apsides superior e inferior, em uma elipse fixa, é de 180°, o ângulo VCp entre as mesmas apsides em uma órbita que um corpo descreve com uma força centrípeta, isto é, como $\frac{bA^m+cA^n}{A^3}$, será igual a um ângulo de 180° $\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. E, se pelo mesmo raciocínio a força centrípeta for como $\frac{bA^m-cA^n}{A^3}$, o ângulo entre as apsides será igual a 180° $\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Da mesma forma, o Problema é resolvido em casos mais difíceis. A quantidade à qual a força centrípeta é proporcional deve sempre ser decomposta em uma série convergente cujo denominador é A^3. Então, deve-se supor que a parte dada do numerador que resulta daquela operação esteja na mesma razão que aquela parte que não é dada, como a parte desse numerador RGG - RFF + TFF - FFX está para aquela parte do mesmo numerador que não é dada. E removendo as quantidades supérfluas, e tomando T igual à unidade, a proporção de G para F é obtida.

COROLÁRIO I – Assim, se a força centrípeta for como qualquer potência da altitude, essa potência pode ser encontrada a partir do movimento das apsides; e vice-versa. Isto é, se o movimento angular total, com o qual o corpo retorna à mesma apside, estiver para o movimento angular de uma revolução, ou 360°, como qualquer número *m* para outro qualquer *n*, e se a altitude for chamada de A; a força será como a potência $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ da altitude; o índice da qual é $\frac{nn}{mm} - 3$.

Isso resulta do segundo Exemplo. Assim, é evidente que a força no recuo a partir do centro não pode diminuir numa razão maior do que a razão cúbica da altitude. Uma vez iniciada a descida de um corpo que gira com tal força, partindo da apside, ele jamais pode alcançar a apside inferior ou a altitude mínima, mas descerá para o centro, descrevendo a linha curva tratada no Corolário III, Proposição XLI. Mas se o corpo, a partir da apside inferior, começasse a subir, mesmo que muito pouco, ele subiria *in infinitum* e jamais chegaria à apside superior; mas descreveria a linha curva mencionada no mesmo Corolário e no Corolário VI, Proposição XLIV. De modo que, onde a força no recuo a partir do centro diminui em uma razão maior do que uma razão cúbica da altitude, o corpo, ao partir da apside, ou descerá para o centro, ou subirá *in infinitum*, dependendo se ele desce ou sobe no início de seu movimento. Mas se a força, no recuo a partir do centro, decresce em uma razão menor do que a razão cúbica da altitude, ou cresce em uma razão qualquer da altitude seja qual ela for, o corpo jamais descerá para o centro, mas, em algum momento, chegará à apside inferior; e, ao contrário, se o corpo, subindo e descendo alternadamente de uma apside para a outra, nunca chegar ao centro, então ou a força cresce no recuo a partir do centro, ou decresce em uma razão menor do que uma razão cúbica da altitude; e quanto mais rapidamente o corpo retorna de uma apside para outra, mais distante da razão cúbica é a razão das forças. Como se o corpo sucessivamente retornasse para e partisse da apside superior em um movimento alternado de subida e descida em 8 revoluções, ou, em 4, ou 2, ou 3/2; isto é, se *m* estivesse para *n* como 8, 4, 2, ou 3/2 para 1, e, portanto, $\frac{nn}{mm} - 3$ fosse (1/64)-3, (1/16)-3, (1/4)-3, ou (4/9)-3, então a força seria como $A^{(1/64)-3}$, $A^{(1/16)-3}$, $A^{(1/4)-3}$, ou $A^{(4/9)-3}$; isto é, seria inversamente como $A^{3-(1/64)}$, $A^{3-(1/16)}$, $A^{3-(1/4)}$, ou como $A^{3-(4/9)}$. Se o corpo, após cada revolução, retornar à mesma apside e essa permanecer imóvel, então *m* estará para *n* como 1 para 1 e, portanto, $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual A^{-2} ou $\frac{1}{AA}$; e assim, a diminui-

ção das forças estará em uma razão quadrada da altitude, como foi demonstrado acima. Se o corpo em três quartas partes, ou dois terços, ou um terço, ou uma quarta parte de uma revolução completa, retorna à mesma apside; m estará para n como 3/4, 2/3, 1/3, ou 1/4, para 1; e, portanto, $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ é igual a $A^{(16/9)-3}$, $A^{(9/4)-3}$, A^{9-3}, ou A^{16-3}; e, assim, ou a força é inversamente como $A^{11/9}$ ou $A^{3/4}$, ou diretamente como A^6, ou A^{13}. Finalmente, se o corpo em novo movimento da apside superior para a mesma apside superior, perfaz uma revolução inteira mais três graus, e, portanto, aquela apside do corpo avança três graus em cada revolução, então m estará para n como 363° para 360°, ou 121° para 120°, portanto, $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual a $A^{-\frac{29523}{14641}}$ e, logo, a força centrípeta será inversamente como $A^{\frac{29523}{14641}}$, ou inversamente como $A^{2\frac{4}{243}}$ muito aproximadamente. Portanto, a força centrípeta diminui em uma razão um pouco maior do que a razão quadrada, mas aproximando-se 59¾ vezes mais da razão quadrada do que da cúbica.

COROLÁRIO II – Assim também se um corpo, impelido por uma força centrípeta inversamente proporcional ao quadrado da altitude, gira em uma elipse cujo foco está no centro de forças; e uma força nova e externa for acrescentada a ou subtraída dessa força centrípeta, o movimento das apsides resultante daquela força externa (pelo terceiro Exemplo) pode ser conhecido; e, ao contrário: se a força com a qual o corpo gira na elipse for como $\frac{1}{AA}$; e a força remanescente como cA, a força remanescente será como $\frac{A - cA^4}{A^3}$; então (pelo terceiro Exemplo), b será igual a 1, m igual a 1 e n a 4; e, assim, o ângulo de revolução entre as apsides é igual a $180° \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$.

Suponha que a força externa seja 357,45 vezes menor do que a outra força pela qual o corpo gira na elipse; isto é, que c seja $\frac{100}{35745}$, A ou T sendo iguais a 1; e, então, $180° \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ será $180° \sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ou 180°.7623, isto é, 180°45'44". Portanto, partindo da apside superior, o corpo chegará à apside inferior com um movimento angular de 180°45'44", e, sendo repetido esse movimento angular, retornará à apside apside superior; e, assim, em *cada revolução* a apside superior avançará 1°31'28". A apside da lua é aproximadamente duas vezes mais rápida.

Isso era o que tínhamos para discutir com relação ao movimento de corpos em órbitas cujos planos passam através do centro de força. Resta agora determinar aqueles movimentos em planos excêntricos. Pois aqueles autores que tratam do movimento de corpos pesados costumavam considerar a subida e a descida de tais corpos não apenas em uma direção perpendicular, mas em todos os graus de obliqüidade em relação a quaisquer planos dados; e, pela mesma razão, devemos considerar aqui os movimentos de corpos que tendem para centros impelidos por forças quaisquer, quando esses corpos se movem em planos excêntricos. Supõe-se que esses planos são perfeitamente lisos e polidos, de modo a não retardar em nada o movimento dos corpos. Além disso, nessas demonstrações, em vez dos planos sobre os quais aqueles corpos rolam ou deslizam, e que são, portanto, planos tangentes aos corpos, usarei planos paralelos a eles, nos quais os centros dos corpos se movem, e, por esse movimento, descrevem órbitas. E pelo mesmo método, posteriormente determino os movimentos de corpos realizados em superfícies curvas.

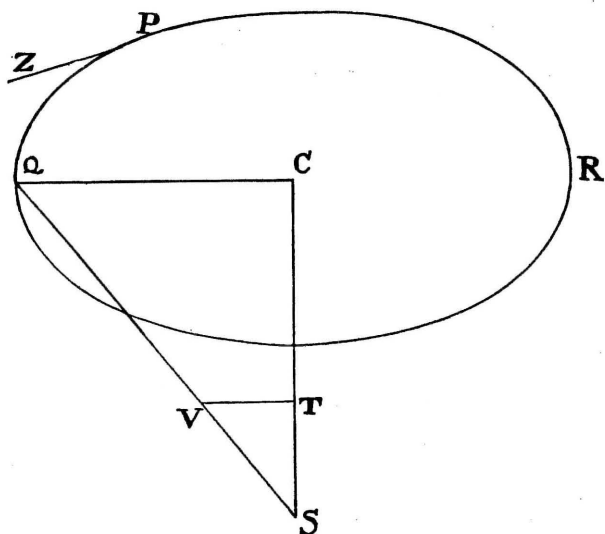
» SEÇÃO X

O movimento de corpos em superfícies dadas;
e o movimento pendular oscilante de corpos

PROPOSIÇÃO XLVI. PROBLEMA XXXII

Supondo-se qualquer tipo de força centrípeta, e sendo dados o centro de força e um plano qualquer no qual o corpo gira e desliza, e admitindo-se as quadraturas das figuras curvilíneas; pede-se determinar o movimento de um corpo que sai de um determinado lugar com uma dada velocidade, na direção de uma linha reta dada naquele plano.

Seja S o centro de força, SC a distância mínima daquele centro a partir do plano dado, P um corpo que sai de um lugar P na direção de uma linha reta PZ, Q o mesmo corpo girando em sua curva e PQR a curva propriamente dita, a qual se pede encontrar, descrita naquele plano dado. Una CQ, QS e se em QS tomarmos SV proporcional à força centrípeta com a qual o corpo é atraído em direção ao centro S, e se traçarmos VT paralelamente a CQ de forma a encontrar SC em T, então a força SV será decomposta em duas (pelo Corolário II das Leis do Movimento), a força ST e a força TV; ST atrai o corpo na direção de uma linha perpendicular àquele plano e não altera, de forma alguma, seu movimento naquele plano. Mas a ação da outra força TV, que coincide com a posição do plano, atrai o corpo diretamen-

te na direção do ponto C dado naquele plano; e, portanto, faz com que o corpo se mova no plano da mesma forma como se a força ST fosse retirada e o corpo tivesse que girar no espaço livre em torno do centro C pela ação apenas da força TV. Mas, sendo dada a força centrípeta com a qual o corpo Q gira no espaço livre em torno do centro C, são também dados (pela Proposição XLII), a curva PQR que o corpo descreve, o lugar Q no qual o corpo será encontrado num tempo qualquer e, finalmente, a velocidade do corpo naquele lugar Q. E vice-versa. Q.E.I.

Proposição XLVII. Teorema XV

Supondo ser a força centrípeta proporcional à distância do corpo a partir do centro; os corpos que giram em quaisquer planos descreverão elipses e completarão suas revoluções em tempos iguais; e aqueles que se movem em linhas retas alternadamente para frente e para trás, completarão seus diversos períodos de idas e vindas nos mesmos tempos.

Pois, tomando-se as mesmas condições da Proposição anterior, a força SV, com a qual o corpo que gira em qualquer plano PQR é atraído em direção ao centro S, é como a distância SQ: e, portanto, como SV e SQ, TV e CQ são proporcionais, a força TV, com a qual o corpo é atraído em direção ao ponto dado C no plano da órbita, é como a distância CQ. Portanto,

as forças com as quais os corpos encontrados no plano PQR são atraídos na direção do ponto C, estão na mesma proporção para as distâncias que as forças com as quais os mesmos corpos são atraídos, de qualquer maneira, em direção ao centro S. E, portanto, os corpos mover-se-ão nos mesmos tempos e nas mesmas figuras, em qualquer plano PQR em torno do ponto C, como fariam nos espaços livres em torno do centro S. E assim (pelo Corolário II, Proposição X e Corolário II, Proposição XXXVIII), irão, em tempos iguais, ou descrever elipses naquele plano, em torno do centro C, ou mover-se em linhas retas que passam pelo centro C naquele plano; completando os mesmos períodos de tempo em todos os casos. Q.E.D.

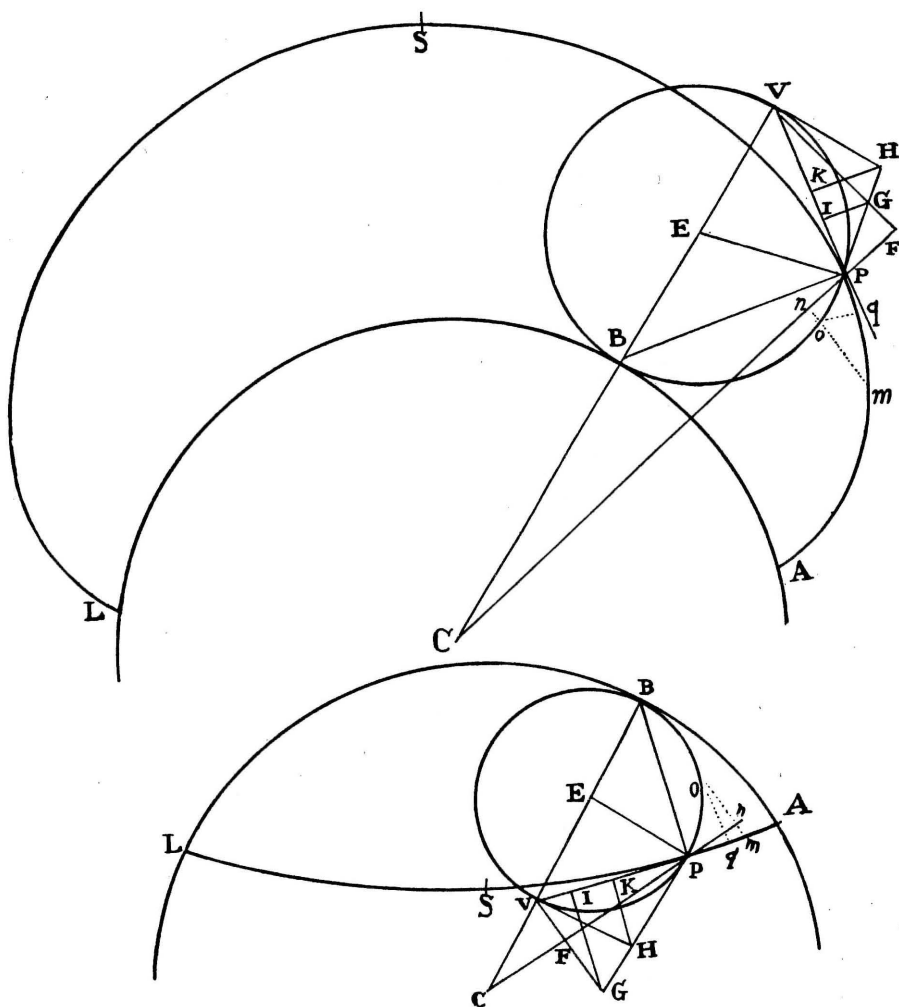
Escólio

A subida ou descida de corpos em superfícies curvas tem uma relação íntima com aqueles movimentos sobre os quais falávamos. Imagine linhas curvas sendo descritas em qualquer plano, girando em torno de quaisquer eixos dados que passam através do centro de força, e que por meio dessa revolução descrevem superfícies curvas; e que os corpos se movem de tal modo que seus centros podem sempre ser encontrados naquelas superfícies. Se aqueles corpos oscilam com uma subida e descida oblíqua, seus movimentos se realizarão em planos que passam através do eixo e, portanto, nas linhas curvas por cujas revoluções aquelas superfícies curvas foram geradas. Naqueles casos, portanto, será suficiente considerar o movimento naquelas linhas curvas.

Proposição XLVIII. Teorema XVI

Se uma roda é colocada do lado de fora de um globo, formando ângulos retos com ele, e girando em torno de seu próprio eixo, desloca-se para frente em um grande círculo, o comprimento do caminho curvilíneo que qualquer ponto dado, no perímetro da roda, descreveu desde o tempo em que tocou o globo (caminho curvilíneo que podemos chamar de ciclóide ou epiciclóide), estará para o dobro do seno verso da metade do arco descrito desde aquele tempo em que vem rolando sobre o globo, como a soma dos diâmetros do globo e da roda está para o semidiâmetro do globo.

Proposição XLIX. Teorema XVII

Se uma roda é colocada no interior de um globo côncavo formando ângulos retos com ele, e girando sobre seu próprio eixo desloca-se para frente em um dos grandes círculos do globo, o comprimento do caminho curvilíneo que qualquer ponto dado, no perímetro da roda, descreveu desde que tocou o globo, estará para o dobro do seno verso da metade do arco descrito em todo o tempo em que vem rolando sobre o globo, como a diferença dos diâmetros do globo e da roda está para o semidiâmetro do globo.

Seja ABL o globo, C seu centro, BPV a roda que repousa sobre o globo, E o centro da roda, B o ponto de contato e P o ponto dado no perímetro da roda. Conceba esta roda progredindo no grande círculo ABL a partir de A, através de B, em direção a L, e no seu progresso girando de tal maneira que os arcos AB, PB sejam sempre iguais uns aos outros, e, nesse ínterim, o ponto dado P descrevendo no perímetro da roda o caminho curvilíneo AP. Seja AP o caminho curvilíneo total descrito desde o momento em que a roda tocou o globo A, e o comprimento AP deste caminho estará para duas vezes o seno verso do arco PB/2 como 2CE para CB. Pois faça a linha reta CE (estendida se necessário) encontrar a roda em V e una CP, BP, EP, VP; estenda e faça incidir nela a perpendicular VF. Faça PH, VH, encontrando-se em H, tocarem o círculo em P e V, e faça PH cortar VF em G e faça incidir as perpendiculares GI, HK sobre VP. A partir do centro C, com qualquer raio, descreva o círculo *nom*, cortando a linha reta CP em *n*, o perímetro da roda, BP, em *o* e o caminho curvilíneo, AP, em *m*; e a partir do centro V, com raio V*o*, descreva um círculo cortando VP estendido em *q*.

Como a roda no seu progresso sempre gira em torno do ponto de contato B, é evidente que a linha reta BP é perpendicular àquela linha curva AP que o ponto P da roda descreve e, portanto, que a linha reta VP tocará esta curva no ponto P. Aumente ou diminua gradualmente o raio do círculo *nom* de maneira que, por fim, este raio torne-se igual à distância CP, e devido à semelhança da figura evanescente P*nomq* e da figura PFGVI, a razão última das pequenas linhas evanescentes P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, isto é, a razão dos incrementos instantâneos da curva AP, da linha reta CP, do arco circular BP e da linha reta VP, será a mesma que a das linhas PV, PF, PG e PI, respectivamente. Mas uma vez que VF é perpendicular a CF, e VH a CV e, portanto, os ângulos HVG, VCF são iguais; e o ângulo VHG (porque os ângulos do quadrilátero HVEP são retos em V e P) é igual ao ângulo CEP, os triângulos VHG, CEP serão semelhantes; e desta forma segue que

$$EP : CE = HG : HV \text{ ou } HP = KI : PK,$$

e por adição ou subtração,

$$CB : CE = PI : PK,$$

$$\text{e } CB : 2CE = PI : PV = Pq : Pm.$$

Portanto, o decremento da linha VP, isto é, o incremento da linha BV - VP para o incremento da linha curva AP está em uma razão dada de CB para 2CE e, portanto (pelo Corolário do Lema IV), os comprimentos BV-VP e AP, gerados por aqueles incrementos, estão na mesma razão. Mas se BV for o raio, VP será o co-seno do ângulo BVP ou ½ BEP e, assim, BV - VP é o seno verso do mesmo ângulo e, portanto, nesta roda cujo raio é ½ BV, BV - VP será

o dobro do seno verso do arco ½ BP. Portanto, AP está para o dobro do seno verso do arco ½ BP como 2CE para CB. Q.E.D.

Com o intuito de diferenciar, chamaremos a linha AP, nas Proposições precedentes, de ciclóide externa ao globo, e a outra na última Proposição de ciclóide interna ao globo.

COROLÁRIO I – Portanto, se for descrita a ciclóide inteira ASL, e a mesma for bisseccionada em S, o comprimento da parte PS estará para o comprimento PV (o qual é o dobro do seno do ângulo VBP, quando EB é o raio) como 2CE para CB e, portanto, em uma dada razão.

COROLÁRIO II – E o comprimento do semidiâmetro da ciclóide AS será igual à linha reta que está para o diâmetro da roda BV como 2CE para CB.

PROPOSIÇÃO L. PROBLEMA XXXIII

Fazer que um corpo pendular oscile em uma dada ciclóide.

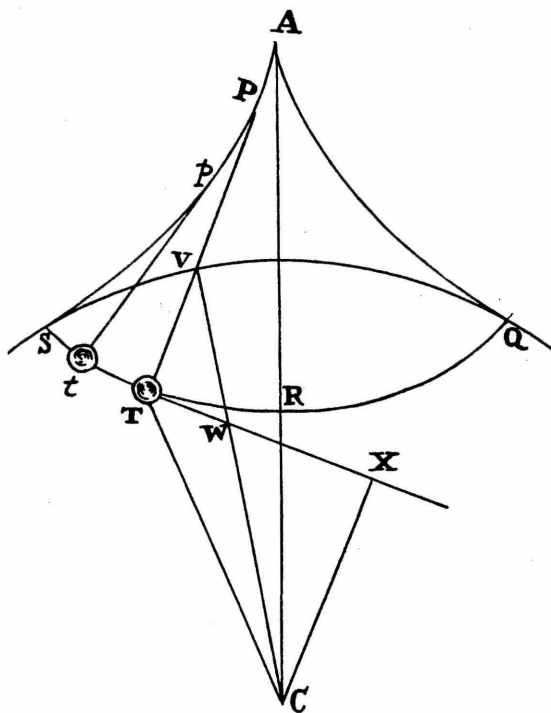
Seja dada, dentro do globo QVS descrito com centro C, a ciclóide QRS, bisseccionada em R, encontrando a superfície do globo em seus pontos extremos Q e S. Trace CR bisseccionando o arco QS em O, e estenda-a

até A, de tal forma que CA esteja para CO como CO para CR. Em torno do centro C, com o raio CA, descreva um globo exterior DAF e, dentro deste globo, por uma roda cujo diâmetro é AO, descreva duas semiciclóides AQ, AS, que toquem o interior do globo em Q e S e encontrem o globo exterior em A. Deste ponto A, com um fio APT igual à linha AR em comprimento, suspenda o corpo T e faça-o oscilar de tal maneira entre as duas semiciclóides AQ e AS, que sempre que o pêndulo se afasta da perpendicular AR, a parte superior do fio AP possa se adaptar àquela semiclóide APS para a qual tende o movimento, e envolver-se naquela linha curva, como se essa fosse um obstáculo sólido, com a parte remanescente do fio PT, que ainda não tocou a semiciclóide permanecendo reta. Então, o peso T oscilará na ciclóide dada QRS. Q.E.F.

Faça o fio PT encontrar a ciclóide QRS em T, o círculo QOS em V e trace CV; e em direção à parte retilínea do fio PT, a partir dos pontos extremos P e T, trace as perpendiculares BP, TW, encontrando a linha reta CV em B e W. É evidente, a partir da construção e geração das figuras semelhantes AS, SR, que aquelas perpendiculares PB, TW, separados de CV os comprimentos VB, VW, são iguais aos diâmetros das rodas OA, OR. Portanto, TP está para VP (que é o dobro do seno do ângulo VBP quando BV/2 é o raio) como BW para BV, ou AO + OR para AO, isto é (uma vez que CA e CO, CO e CR e, por divisão, AO e OR são proporcionais), como CA + CO para CA ou, se BV for bisseccionada em E, como 2CE para CB. Portanto (pelo Corolário I da Proposição XLIX), o comprimento da parte retilínea do fio PT é sempre igual ao arco da ciclóide PS e todo o fio APT será sempre igual à metade da ciclóide APS, isto é (pelo Corolário II da Proposição XLIX) ao comprimento AR. E, inversamente, se o fio é sempre igual ao comprimento AR, o ponto T mover-se-á sempre na ciclóide dada QRS. Q.E.D.

Corolário – O fio AR é igual à semiciclóide AS e, portanto, tem a mesma razão para AC, o semidiâmetro do globo exterior, que a semiciclóide SR tem para CO, o semidiâmetro do globo interior.

Proposição LI. Teorema XVIII

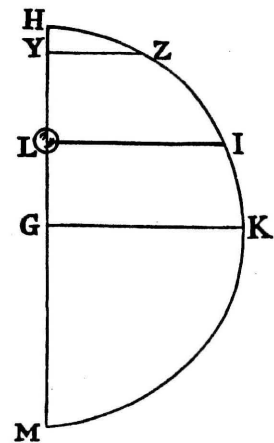
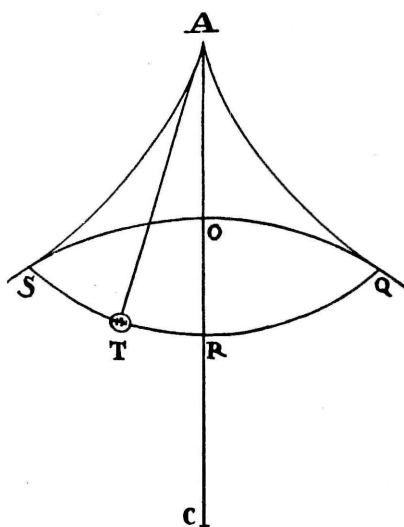
Se a força centrípeta, que tende em todos os lados de um globo para o centro C, *estiver em todos os lugares como a distância do lugar a partir do centro, e somente por sua ação o corpo* T *oscila (da maneira descrita acima) no perímetro da ciclóide* QRS: *afirmo que todas as oscilações, ainda que desiguais entre si, serão realizadas em tempos iguais.*

Sobre a tangente TW, estendida indefinidamente, faça incidir a perpendicular CX e una CT. Como a força centrípeta com a qual o corpo T é impelido em direção a C é igual à distância CT, decomponha-a (pelo Corolário II das Leis) nas partes CX, TX, das quais CX, impelindo o corpo diretamente a partir de P, estica o fio PT, e devido à resistência do fio, a força é totalmente empregada, não produzindo efeito. Mas a outra parte TX, impelindo o corpo transversalmente ou em direção a X, acelera diretamente o movimento na ciclóide. Então, é evidente que a aceleração do corpo, proporcional a esta força acelerativa, será em cada momento como o comprimento TX, isto é (como CV, WV e TX, TW, proporcionais a eles, são dados), como o comprimento TW, ou seja (pelo Corolário I da Proposição XLIX), como o comprimento do arco da ciclóide TR. Portanto, se dois pêndulos APT, A*pt*, forem desigualmente afastados da perpendicular AR e deixados cair juntos, suas acelerações serão sempre como os arcos a serem descritos TR, *t*R. Mas as partes descritas no início do movimento são como as acelerações, isto é, como os espaços totais a serem descritos no início e, portanto, as partes restantes a serem descritas e as acelerações subseqüentes, proporcionais àquelas partes, serão também como os espaços totais, e assim por diante. Portanto, as acelerações e, conseqüentemente, as velocidades geradas, as partes

descritas com aquelas velocidades e as partes a serem descritas, são como os espaços totais; e, portanto, as partes a serem descritas, guardando uma dada razão entre si, desaparecerão, isto é, os corpos oscilantes chegarão juntos à perpendicular AR. E uma vez que, por outro lado, a subida dos pêndulos a partir do lugar mais baixo R, através dos mesmos arcos ciclóides, com um movimento retrógrado, é retardada nos vários lugares por onde passam pelas mesmas forças pelas quais sua descida foi acelerada, é claro que as velocidades nas subidas e descidas através dos mesmos arcos serão iguais e, conseqüentemente, realizadas em tempos iguais. E, portanto, uma vez que as duas partes da ciclóide RS e RQ que estão em cada lado da perpendicular, são semelhantes e iguais, os dois pêndulos realizarão tanto o total como a metade das suas oscilações nos mesmos tempos. Q.E.D.

Corolário – A força com a qual o corpo T é acelerado ou retardado em qualquer lugar T da ciclóide, está para o peso total do mesmo corpo no lugar mais alto S ou Q como o arco da ciclóide TR para o arco SR ou QR.

Proposição LII. Problema XXXIV

Definir as velocidades de pêndulos nos vários lugares, e os tempos nos quais tanto as oscilações totais como suas várias partes são realizadas.

Em torno de qualquer centro G, com raio GH igual ao arco da ciclóide RS, descreva um semicírculo HKM, bisseccionado pelo semidiâmetro GK. E, se uma força centrípeta proporcional à distância dos lugares a partir do centro tende para o centro G, e for, no perímetro HIK, igual à força centrípeta no perímetro do globo, QOS, que tende para o seu centro, e ao mesmo tempo que o pêndulo T cai do lugar mais alto S, um corpo, como L, cai de H para G; então, como as forças que agem sobre os corpos são iguais no início, e sempre proporcionais aos espaços a serem descritos TR, LG, então, se TR e LG são iguais, as forças serão também iguais nos lugares T e L, e é claro que aqueles corpos descrevem no início espaços iguais ST, HL, e, portanto, são ainda empurrados igualmente e continuam a descrever espaços iguais. Portanto, pela Proposição XXXVIII, o tempo no qual o corpo descreve o arco ST está

para o tempo de uma oscilação como o arco HI, o tempo no qual o corpo chega a L, para o semiperímetro HKM, o tempo no qual o corpo H chegará a M. E a velocidade do corpo pendular no lugar T está para a sua velocidade no lugar mais baixo R, isto é, a velocidade do corpo H no lugar L para a sua velocidade no lugar G, ou o incremento instantâneo da linha HL para o incremento instantâneo da linha HG (os arcos HI, HK aumentando com uma velocidade uniforme), como a ordenada LI para o raio GK ou como $\sqrt{(SR^2\text{-}TR^2)}$ para SR. Portanto, uma vez que, em oscilações desiguais, são descritos, em tempos iguais, arcos proporcionais aos arcos das oscilações, as velocidades e os arcos descritos são obtidos universalmente em todas as oscilações a partir dos tempos dados. O que foi requerido inicialmente.

Faça agora quaisquer corpos pendulares oscilarem em diferentes ciclóides, descritas dentro dos globos diferentes, cujas forças absolutas são também diferentes; e se a força absoluta de qualquer globo QOS for chamada de V, a força acelerativa com a qual o pêndulo é impelido na circunferência deste globo quando começa a se mover diretamente em direção ao seu centro, será como a distância do corpo pendular a partir do centro e a força absoluta do globo conjuntamente, isto é, como CO.V. Portanto, a pequena linha HY, que é como esta força acelerada CO.V, será descrita em um tempo dado. E se for traçada a perpendicular YZ encontrando a circunferência em Z, o arco nascente HZ denotará aquele tempo dado. Mas aquele arco nascente HZ varia como a raiz quadrada do retângulo GH.HY e, portanto, como $\sqrt{(GH.CO.V)}$. Portanto, o tempo de uma oscilação inteira na ciclóide QRS

(sendo como o semiperímetro HKM, que denota esta oscilação inteira, diretamente; e como o arco HZ, o qual, de forma semelhante, denota um tempo dado, inversamente) será como GH diretamente e $\sqrt{(GH.CO.V)}$ inversamente; isto é, porque GH e SR são iguais, como $\sqrt{\frac{SR}{CO.V}}$, ou (pelo Corolário da Proposição L) como $\sqrt{\frac{AR}{AC.V}}$. Portanto, as oscilações em todos os globos e ciclóides, realizadas com quaisquer forças absolutas, variam diretamente como a raiz quadrada do comprimento da corda, inversamente como a raiz quadrada da distância entre o ponto de suspensão e o centro do globo, e também inversamente como a raiz quadrada da força absoluta do globo. Q.E.I.

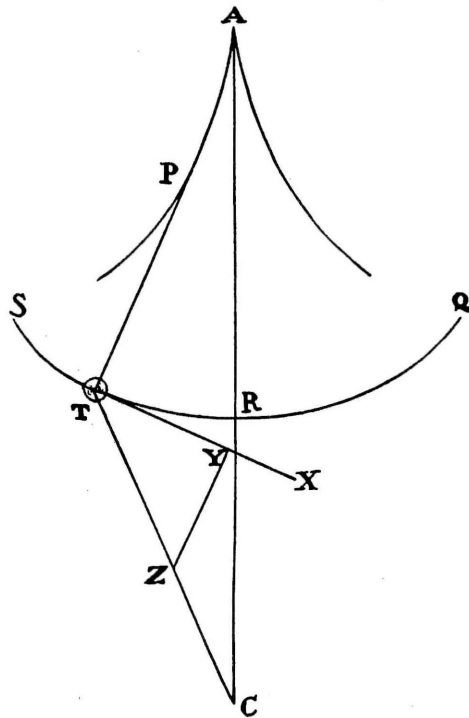
Corolário I – Assim, também os tempos de oscilação, queda e revolução dos corpos podem ser comparados entre si. Pois, se o diâmetro da roda com a qual a ciclóide é descrita dentro do globo é suposto igual ao semidiâmetro do globo, a ciclóide se tornará uma linha reta que passa pelo centro do globo, e a oscilação será transformada em uma descida e uma subida subseqüente naquela linha reta. Assim, são dados tanto o tempo da descida a partir de qualquer lugar para o centro, como o tempo no qual o corpo, girando uniformemente em torno do centro do globo, a qualquer distância, descreve um arco de um quadrante. Porque este tempo (pelo Caso 2) está para o tempo de metade da oscilação em qualquer ciclóide QRS como 1 para $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corolário II – Portanto, segue também o que Sir *Christopher Wren* e Mr. *Huygens* descobriram com respeito à ciclóide comum. Pois se o diâmetro do globo for infinitamente aumentado, sua superfície esférica transformar-se-á em um plano e a força centrípeta agirá uniformemente na direção das linhas perpendiculares àquele plano, e a nossa ciclóide tornar-se-á a mesma que a ciclóide comum. Mas, naquele caso, o comprimento do arco da ciclóide entre aquele plano e o ponto descrito tornar-se-á igual a quatro vezes o seno verso de metade do arco da roda entre o mesmo plano e o ponto descrito, como foi descoberto por Sir *Christopher Wren.* E um pêndulo entre essas duas ciclóides oscilará em uma ciclóide semelhante e igual em tempos iguais, como Mr. *Huygens* demonstrou. A descida de corpos pesados, também no tempo de uma oscilação, será a mesma como Mr. *Huygens* expôs.

As Proposições aqui demonstradas são adaptadas à verdadeira constituição da Terra, à medida que rodas movendo-se em qualquer dos seus grandes círculos descrevem, pelos movimentos de cravos fixados em seus pe-

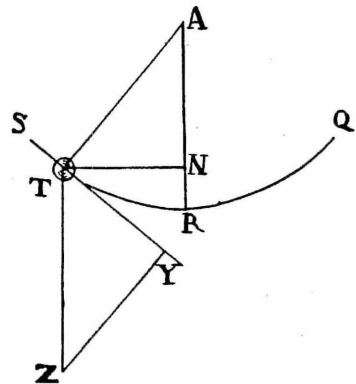
rímetros, ciclóides externas ao globo; e pêndulos, em minas e cavernas profundas da Terra, devem oscilar em ciclóides internas ao globo, sendo que essas oscilações podem ser realizadas em tempos iguais. Pois a gravidade (como será mostrado no terceiro Livro) diminui com o afastamento da superfície da Terra; para cima como a raiz quadrada das distâncias a partir do cento da Terra, e para baixo como essas distâncias.

Proposição LIII. Problema XXXV

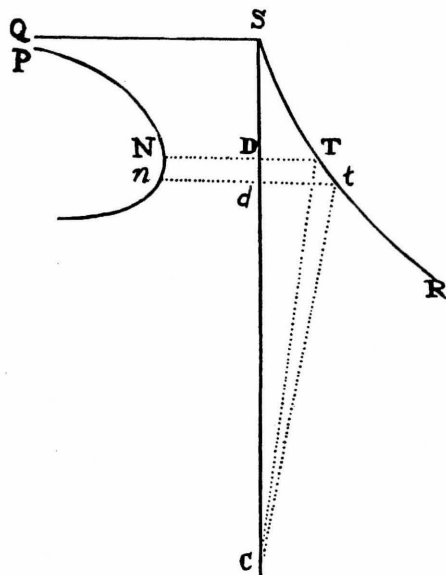
Dadas as quadraturas das figuras curvilíneas, pede-se encontrar as forças com as quais corpos que se movem em linhas curvas dadas podem realizar suas oscilações em tempos iguais.

Faça o corpo T oscilar em qualquer linha curva STRQ, cujo eixo é AR e passa através do centro de força C. Trace TX tocando aquela curva em qualquer lugar do corpo T, e, naquela tangente, TX, tome TY igual ao arco TR. O comprimento daquele arco é conhecido pelos métodos comuns para

as quadraturas das figuras. A partir do ponto Y, trace a linha reta YZ perpendicularmente à tangente. Trace CT encontrando YZ em Z, e a força centrípeta será proporcional à linha reta TZ. Q.E.I.

Pois, se a força com a qual o corpo é atraído de T para C porque for representada pela linha reta TZ, tomada proporcional a ela, aquela força será decomposta em duas forças TY, YZ, das quais YZ, puxando o corpo na direção do comprimento do fio PT, não chega a alterar seu movimento; enquanto a outra força TY acelera ou retarda diretamente seu movimento na curva STRQ. Portanto, uma vez que aquela força é como o espaço a ser descrito TR, as acelerações ou retardos do corpo ao descrever duas partes proporcionais (uma maior e outra menor) de duas oscilações serão sempre como aquelas partes e, assim, fará com que aquelas partes sejam descritas juntas. Mas os corpos que continuamente descrevem no mesmo tempo partes proporcionais ao todo, descreverão o todo no mesmo tempo. Q.E.D.

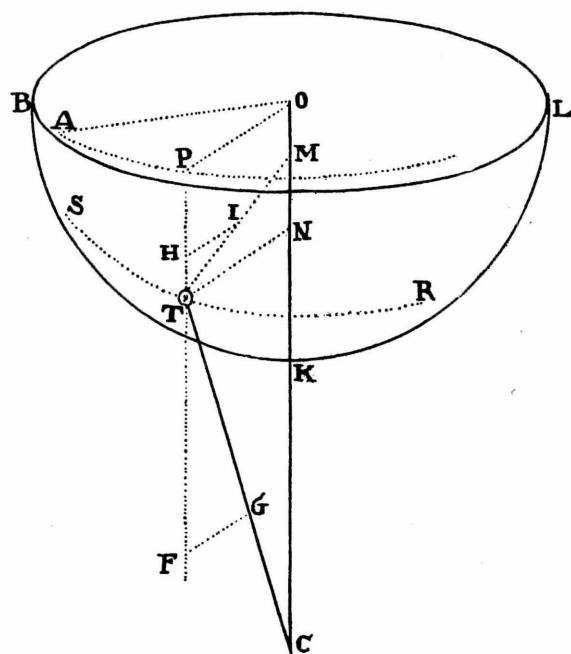
COROLÁRIO I – Portanto, se o corpo T, sustentado por um fio retilíneo AT a partir do centro A, descreve o arco circular STRQ e, neste meio-tempo, é impedido por qualquer força, que tende para baixo com direções paralelas, que está para a força uniforme da gravidade como o arco TR para o seu seno TN, os tempos das várias oscilações serão iguais. Pois como TZ, AR são paralelos, os triângulos ATN, ZTY são semelhantes; e, portanto, TZ estará para AT como TY para TN; isto é, se a força uniforme da gravidade for representada pelo comprimento dado AT, a força TZ, pela qual as oscilações tornam-se isócronas, estará para a força da gravidade AT como o arco TR, igual a TY, está para TN, o seno daquele arco.

COROLÁRIO II – E, portanto, nos relógios, se as forças são imprimidas sobre o pêndulo por alguma máquina que dá continuidade ao movimento, e de tal forma compostas com a força da gravidade, de modo que a força total tendendo para baixo, seja sempre como uma linha que é obtida dividindo-se o produto do arco TR e do raio AR pelo seno TN, então, todas as oscilações tornar-se-ão isócronas.

Proposição LIV. Problema XXXVI

Admitidas as quadraturas de figuras curvilíneas, pede-se encontrar os tempos nos quais os corpos, por meio de qualquer força centrípeta, descerão ou subirão, em quaisquer linhas curvas, um plano que passa através do centro da força.

Faça o corpo descer a partir de qualquer lugar S e mover-se em qualquer curva ST*t*R, dada em um plano que passa através do centro de força C. Una CS e divida-a em inumeráveis partes iguais, e seja D*d* uma daquelas partes. A partir do centro C, com os raios CD, C*d*, descreva os círculos DT, *dt* encontrando a linha curva ST*t*R em T e *t*. E como a lei da força centrípeta é dada, e também a altitude CS da qual o corpo inicialmente caiu, estará dada a velocidade do corpo em qualquer outra altitude CT (pela Proposição XXXIX). Mas o tempo no qual o corpo descreve pequena linha T*t* é como o comprimento dessa pequena linha, isto é, diretamente como a secante do ângulo *t*TC e inversamente como a velocidade. Seja a ordenada DN, proporcional a esse tempo, perpendicular à linha reta CS no ponto D, e como D*d* é dada, o retângulo D*d*.DN, isto é, a área DN*nd*, será proporcional ao mesmo tempo. Portanto, se PN*n* for uma linha curva que o ponto N toca continuamente, e sua assíntota for a linha reta SQ situada acima da linha CS, formando ângulos retos com esta, a área SQPND será proporcional ao tempo no

qual o corpo, em sua descida, descreveu a linha ST; e, portanto, encontrando-se aquela área, o tempo também será fornecido. Q.E.I.

Proposição LV. Teorema XIX

Se um corpo move-se em qualquer superfície curva, cujo eixo passa através do centro de força, e, a partir do corpo, traça-se uma perpendicular sobre o eixo; e uma linha paralela e igual a ela for traçada, a partir de qualquer ponto dado do eixo, afirmo que essa linha paralela descreverá uma área proporcional ao tempo.

Seja BKL uma superfície curva, T um corpo que gira nela, STR uma curva que o corpo descreve na mesma, S o início da curva, OMK o eixo da superfície curva, TN uma linha reta traçada perpendicularmente do corpo até o eixo; OP uma linha paralela e igual a ela, traçada a parir do ponto dado O no eixo; AP a trajetória descrita pelo ponto P no plano AOP, no qual a linha que gira, OP, é encontrada; A, o começo daquele trajeto correspondendo ao ponto S; TC uma linha reta traçada do corpo ao centro; TG uma parte dela, proporcional à força centrípeta com a qual o corpo tende para o

centro C; TM uma linha reta perpendicular à superfície curva; TI uma parte dela proporcional à força de pressão com a qual o corpo pressiona a superfície e, portanto, com a qual ele é novamente repelido pela superfície em direção a M; PTF uma linha reta paralela ao eixo e que passa pelo corpo, e GF, IH, linhas retas traçadas perpendicularmente a partir dos pontos G e I sobre aquela paralela PHTF. Afirmo, agora, que a área AOP descrita pelo raio OP a partir do início do movimento, é proporcional ao tempo. Pois a força TG (pelo Corolário II das Leis do Movimento) é decomposta nas forças TF, FG; e a força TI, nas forças TH, HI; mas as forças TF, TH, atuando na direção da linha PF perpendicular ao plano AOP, não introduzem mudança alguma no movimento do corpo, mas sim em uma direção perpendicular àquele plano. Portanto, seu movimento, enquanto tiver a mesma direção da posição do plano, isto é, o movimento do ponto P, pelo qual a projeção AP da curva é descrita naquele plano, é o mesmo que se as forças TF, TH fossem retiradas e o corpo fosse impelido somente pelas forças FG, HI; isto é, o mesmo se o corpo tivesse que descrever, no plano AOP, a curva AP por meio de uma força centrípeta que tendesse para o centro O, igual à soma das forças FG e HI. Mas com tal força (pela Proposição I), a área AOP será descrita proporcionalmente ao tempo. Q.E.D.

COROLÁRIO – Pelo mesmo raciocínio, se um corpo, impelido por forças que tendem para dois ou mais centros na mesma linha reta dada CO, tivesse que descrever em um espaço livre qualquer linha curva ST, a área AOP seria sempre proporcional ao tempo.

PROPOSIÇÃO LVI. PROBLEMA XXXVII

Dadas as quadraturas de figuras curvilíneas e supondo-se que são dadas tanto a lei da força centrípeta que tende para o centro dado, quanto a superfície curva cujo eixo passa através daquele centro; pede-se encontrar a curva que um corpo descreverá nesta superfície quando deixa um dado lugar com uma dada velocidade e em uma direção dada naquela superfície.

Mantendo-se a última construção, faça o corpo T ir do lugar dado S, na direção de uma linha reta dada em posição, e percorrer a curva procurada STR, cuja projeção ortográfica no plano BDO é AP. E a partir da velocidade dada do corpo na altitude SC, sua velocidade em qualquer outra altitude TC também será conhecida. Com essa velocidade, num dado momento de tempo, faça o corpo descrever o segmento T*t* da sua curva e seja

P*p* a projeção desse segmento descrito no plano AOP. Una O*p* e, descrevendo um pequeno círculo sobre a superfície curva em torno do centro T, com o raio T*t*, faça a projeção desse pequeno círculo no plano AOP ser a elipse *p*Q. E, como o tamanho desse pequeno círculo T*t* é dado, bem como sua distância TN ou PO a partir do eixo CO, a elipse *p*Q será conhecida tanto em natureza como em tamanho, bem como sua posição em relação à linha reta PO. E, uma vez que a área PO*p* é proporcional ao tempo e, portanto, é dada porque o tempo é dado, o ângulo PO*p* será conhecido. E, portanto, será conhecida *p*, a intersecção comum da elipse com a linha reta O*p*, juntamente com o ângulo OP*p*, com o qual a projeção AP*p* da curva corta a linha OP. Mas, daí (comparando-se a Proposição XLI com seu Corolário II), a maneira de determinar a curva AP*p* aparece facilmente. Então, a partir dos vários pontos dessa projeção, traçando-se a partir do plano AOP as perpendiculares PT, que encontram a superfície curva em T, os vários pontos da curva serão conhecidos.

» SEÇÃO XI

Os movimentos de corpos que tendem uns para os outros com forças centrípetas

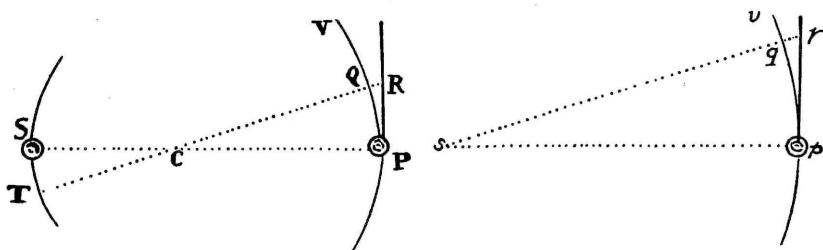
Até agora tenho tratado das atrações de corpos na direção de um centro imóvel, embora seja muito provável que tal coisa não exista na natureza. Porque, pela Lei III, atrações são exercidas na direção dos corpos, e as ações dos corpos atraídos são sempre recíprocas e iguais, de forma que se há dois corpos, nem o corpo atraído nem o atrativo estão realmente em repouso, mas ambos (pelo Corolário IV das Leis do Movimento), considerando-se que sejam mutuamente atraídos, giram em torno de um centro comum de gravidade. E, se houver mais corpos que são atraídos por um corpo, o qual é novamente atraído por eles, ou que se atraem mutuamente, estes corpos mover-se-ão de tal forma entre si, que seu centro comum de gravidade estará em repouso ou movendo-se uniformemente em uma linha reta. Devo, portanto, no momento, continuar tratando do movimento de corpos que se atraem uns aos outros, considerando as forças centrípetas como atrações, embora talvez em um sentido estritamente físico, elas possam mais corretamente ser chamadas de impulsos. Mas essas proposições devem ser consideradas como puramente matemáticas; e, portanto, deixando de lado todas as considerações físicas, expresso-me de uma maneira familiar, para fazer-me mais facilmente entendido pelo leitor matemático.

Proposição LVII. Teorema XX

Dois corpos que se atraem descrevem figuras semelhantes em torno de seu centro comum de gravidade, um em torno do outro.

As distâncias dos corpos a partir de seus centros comuns de gravidade são inversamente como os corpos; e, portanto, estarão em uma dada razão uma para a outra; e, assim, por composição de razões, em uma dada razão com a distância total entre os dois corpos. Essas distâncias giram em torno da sua extremidade comum com um movimento angular uniforme, porque estando na mesma linha reta, elas nunca mudam sua inclinação uma para a outra. Mas linhas retas, que estão em uma razão dada uma para a outra, e que giram em torno de suas extremidades com um movimento angular uniforme, descrevem sobre planos, que estão em repouso junto com elas, ou movem-se com qualquer movimento não angular, figuras completamente semelhantes em torno dessas extremidades. Portanto, as figuras descritas pela revolução dessas distâncias são semelhantes. Q.E.D.

Proposição LVIII. Teorema XXI

Se dois corpos atraem-se com forças de qualquer tipo e giram em torno de um centro comum de gravidade: afirmo que, considerando um dos corpos imóvel, pelas mesmas forças poderá ser descrita uma figura semelhante e igual às figuras, que os corpos movendo-se, descrevem um em torno do outro.

Sejam os corpos S e P que giram torno de seu centro comum de gravidade C, prosseguindo de S para T e de P para Q. A partir do ponto dado *s* trace continuamente *sp*, *sq*, iguais e paralelas a SP, TQ; e a curva *pqv* que o ponto *p* descreve em sua revolução em torno do ponto fixo *s*, será semelhante e igual às curvas que os corpos S e P descrevem um em torno do outro; e, portanto, pelo Teorema XX, semelhante às curvas ST e PQV que os mesmos

corpos descrevem em torno de seu centro comum de gravidade C; isto porque as proporções das linhas SC, CP, e SP ou *sp*, uma para a outra, são dadas.

CASO 1 – O centro comum de gravidade C (pelo Corolário IV das Leis do Movimento) está em repouso ou move-se uniformemente em linha reta. Suponhamo-lo primeiro em repouso, e em *s* e *p* coloquemos dois corpos, um imóvel em *s*, o outro móvel em *p*, semelhantes e iguais aos corpos S e P. Então, faça as linhas retas PR e *pr* tocarem as curvas PQ e *pq* em P e *p*, e estenda CQ e *sq* até R e *r*. E, como as figuras CPRQ, *sprq* são semelhantes, RQ estará para *rq* como CP para *sp*, e, portanto, em razão dada. Assim, se a força com a qual o corpo P é atraído em direção ao corpo S, e, em conseqüência, em direção ao centro intermediário C, estivesse para a força com a qual o corpo *p* é atraído em direção ao centro *s*, na mesma razão dada, essas forças atrairiam os corpos, em tempos iguais, a partir das tangentes PR, *pr* para os arcos PQ, *pq*, através de intervalos proporcionais a eles RQ, *rq*; e, portanto, esta última força (tendendo para *s*) faria o corpo *p* girar na curva *pqv*, que se tornaria semelhante à curva PQV, na qual a primeira força obriga o corpo P a girar. E suas revoluções seriam completadas nos mesmos tempos. Mas como aquelas forças não estão uma para a outra na razão de CP para *sp*, mas (devido à semelhança e igualdade dos corpos S e *s*, P e *p*, e à igualdade das distâncias SP e *sp*) mutuamente iguais, os corpos, em tempos iguais, serão igualmente desviados das tangentes; e, portanto, para que o corpo *p* possa ser atraído através do intervalo maior *rq*, é necessário um tempo maior, que irá variar com a raiz quadrada dos intervalos; porque, pelo Lema X, os espaços descritos no início do movimento são como o quadrado dos tempos. Suponha, então, que a velocidade do corpo *p* esteja para a velocidade do corpo P como a raiz quadrada da razão da distância *sp* para a distância CP, de forma que os arcos *pq*, PQ, que estão em uma proporção simples para o outro, possam ser descritos em tempos que são como as raízes quadradas das distâncias; e os corpos P, *p*, sempre atraídos por forças iguais, descreverão em torno dos centros fixos C e *s* figuras semelhantes PQV, *pqv*, a última das quais é semelhante e igual à figura que o corpo P descreve em torno do corpo móvel S. Q.E.D.

CASO 2 – Suponha, agora, que o centro comum de gravidade, junto com o espaço no qual os corpos movem-se entre si, desloca-se uniformemente em linha reta (pelo Corolário VI das Leis do Movimento) e todos os movimentos neste espaço serão realizados da mesma maneira que antes; e, portanto, os corpos descreverão, uns em torno dos outros, as mesmas figuras que antes, que serão, conseqüentemente, semelhantes e iguais à figura *pqv*. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, dois corpos atraindo-se um ao outro com forças proporcionais à sua distância, descrevem elipses concêntricas (pela Proposição X), tanto em torno do seu centro comum de gravidade, como em torno um do outro; e, de modo oposto, se tais figuras são descritas, as forças são proporcionais às distâncias.

COROLÁRIO II – E dois corpos, submetidos a forças que são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias, descrevem (pelas Proposições XI, XII, XIII) seções cônicas com foco no centro em torno do qual as figuras são descritas, tanto ao redor do seu centro comum de gravidade, como em torno um do outro; e, de modo contrário, se tais figuras são descritas as forças centrípetas são inversamente proporcionais ao quadrado da distância.

COROLÁRIO III – Dois corpos quaisquer, girando em torno do seu centro comum de gravidade, descrevem áreas proporcionais aos tempos, por meio de raios traçados a partir do centro até cada um deles.

PROPOSIÇÃO LIX. TEOREMA XXII

O tempo periódico de dois corpos S *e* P, *que giram em torno do seu centro comum de gravidade* C, *está para o tempo periódico com que um dos corpos,* P, *gira em torno do outro,* S, *que permanece fixo, descrevendo uma figura semelhante e igual àquelas que os corpos descrevem em torno um do outro, como* $\sqrt{S}$ *está para* $\sqrt{(S+P)}$.

Pois, pela demonstração da última Proposição, os tempos nos quais quaisquer arcos semelhantes PQ e *pq* são descritos estão como a raiz quadrada de CP está para a raiz quadrada de SP ou de *sp*, isto é, como $\sqrt{S}$ para $\sqrt{(S+P)}$. E, por composição de razões, as somas dos tempos nos quais todos os arcos semelhantes PQ e *pq* são descritos, isto é, os tempos totais no qual as figuras semelhantes inteiras são descritas, estão, na mesma razão, a de $\sqrt{S}$ para $\sqrt{(S+P)}$. Q.E.D.

PROPOSIÇÃO LX. TEOREMA XXIII

Se dois corpos S *e* P, *atraindo-se com forças inversamente proporcionais ao quadrado da sua distância, giram em torno do seu centro comum de gravidade, afirmo que o eixo principal da elipse que qualquer dos corpos, como* P,

descreve pelo seu movimento em torno do outro, S *estará para o eixo principal da elipse, que o mesmo corpo* P *pode descrever no mesmo tempo periódico em torno do outro corpo fixo* S, *como a soma dos dois corpos,* S + P, *para a primeira de duas médias proporcionais*[1] *entre aquelas soma e o outro corpo* S.

Pois se as elipses descritas fossem iguais entre si, seus tempos periódicos, pelo último Teorema, seriam como a raiz quadrada da razão do corpo S para a soma dos corpos, S + P. Diminua nessa razão o tempo periódico na última elipse, e os tempos periódicos se tornarão iguais; mas, pela Proposição XV, o eixo principal da elipse será diminuído numa razão que é a potência 3/2 da primeira razão; isto é, em uma razão para a qual a razão de S para S + P é cúbica, e, portanto, aquele eixo estará para o eixo principal da outra elipse como a primeira de duas médias proporcionais entre S + P e S para S + P. Inversamente, o eixo principal da elipse descrita em torno do corpo móvel estará para o eixo principal daquela descrita em torno do corpo imóvel, como S + P para a primeira de duas médias proporcionais entre S + P e S. Q.E.D.

Proposição LXI. Teorema XXIV

Se dois corpos, atraindo-se mutuamente com qualquer tipo de forças, e não agitados ou obstruídos de qualquer maneira, movem-se seja de que maneira for, aqueles movimentos serão os mesmos como se eles não se atraíssem um ao outro de maneira alguma, mas como se fossem ambos atraídos com as mesmas forças por um terceiro corpo localizado no seu centro comum de gravidade; e a lei das forças atrativas será a mesma com relação à distância que os corpos guardam do centro comum, e com relação à distância entre os dois corpos.

Pois aquelas forças com as quais os corpos se atraem mutuamente, por tenderem para os corpos, tendem também para o centro comum de gravidade, que está diretamente entre eles; e, portanto, são as mesmas como se procedessem de um corpo intermediário. Q.E.D.

E como é dada a razão da distância de qualquer dos corpos daquele centro comum para a distância entre os dois corpos, será dada também, é claro, a razão de qualquer potência de uma distância para a mesma potência da outra distância; e também a razão de qualquer quantidade, *derivada*

1. Ver nota 24 do Apêndice.

de qualquer maneira, a partir de uma das distâncias composta de qualquer maneira com quantidades dadas, para uma outra quantidade derivada, da mesma maneira, a partir da outra distância, e tendo igual número de quantidades dadas que aquela dada razão das distâncias para a primeira. Portanto, se a força com a qual um corpo é atraído por um outro for direta ou inversamente como a distância dos corpos um do outro, ou como qualquer potência daquela distância; ou, finalmente, como qualquer quantidade derivada de qualquer maneira a partir daquela distância composta com quantidades dadas; então, a mesma força com a qual o mesmo corpo é atraído para o centro comum de gravidade será, da mesma maneira, direta ou inversamente como a distância que o corpo atraído guarda do centro comum, ou como qualquer potência daquela distância; ou, finalmente, como uma quantidade derivada da mesma maneira daquela distância composta com quantidades análogas dadas. Isto é, a lei das forças atrativas será a mesma com relação a ambas as distâncias. Q.E.D.

Proposição LXII. Problema XXXVIII

Determinar os movimentos de dois corpos que se atraem mutuamente com forças inversamente proporcionais aos quadrados da distância entre eles, e que são abandonados a partir de lugares dados.

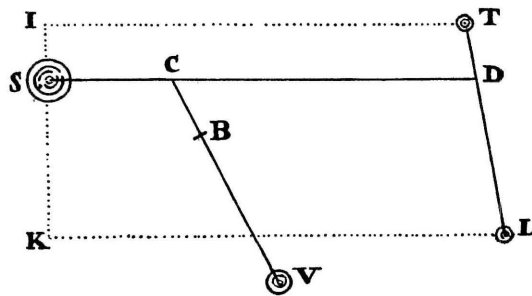
Os corpos, pelo último Teorema, mover-se-ão da mesma maneira como se fossem atraídos por um terceiro, localizado no centro comum de sua gravidade; e pela hipótese de que o centro será fixado no início de seu movimento, portanto (pelo Corolário IV das Leis do Movimento), será sempre fixo. Os movimentos dos corpos devem ser, portanto, determinados (pelo Problema XXV) da mesma maneira, como se eles fossem impelidos por forças que tendem para aquele centro; e, então, teremos os movimentos dos corpos que se atraem mutuamente. Q.E.I.

Proposição LXIII. Problema XXXIX

Determinar os movimentos de dois corpos que se atraem mutuamente com forças inversamente proporcionais ao quadrado de sua distância, e que se afastam de lugares dados, em direções dadas, com velocidades dadas.

Sendo dados os movimentos iniciais dos corpos, são dados também o movimento uniforme do centro comum de gravidade e o movimento do espaço que acompanha esse centro uniformemente em uma linha reta, e também os primeiros, ou movimentos iniciais dos corpos em relação a esse espaço. Então (pelo Corolário V das Leis e último Teorema), os movimentos subseqüentes serão realizados da mesma maneira naquele espaço, como se ele, juntamente com o centro comum de gravidade, estivesse em repouso, e como se os corpos não se atraíssem mutuamente, mas fossem atraídos por um terceiro corpo, localizado naquele centro. O movimento, portanto, nesse espaço móvel de cada corpo que se afasta de um dado lugar, em uma dada direção, com uma dada velocidade, e sob a ação de uma força centrípeta que tende para aquele centro, deve ser determinado pelos Problemas IX e XXVI, e, ao mesmo tempo, obter-se-á o movimento do outro em torno do mesmo centro. Com esse movimento, componha o movimento progressivo uniforme do sistema inteiro do espaço e dos corpos que nele giram, será obtido o movimento absoluto dos corpos em um espaço imóvel. Q.E.I.

Proposição LXIV. Problema XL

Supondo que as forças com as quais corpos se atraem mutuamente cresçam em uma razão simples de suas distâncias a partir dos centros, é requerido encontrar os movimentos de vários corpos entre si.

Suponha que os dois primeiros corpos T e L tenham seu centro comum de gravidade em D. Esses, pelo Corolário I, Teorema XXI, descreverão elipses com seus centros em D, sendo as grandezas dessas elipses conhecidas pelo Problema V.

Faça agora um terceiro corpo S atrair os dois primeiros, T e L, com as forças acelerativas ST, SL, e faça com que ele seja, por sua vez, atraído por aqueles. A força ST (pelo Corolário II das Leis do Movimento) é decompos-

ta nas forças SD, DT; e a força SL, nas forças SD, DL. Agora, as forças DT, DL, que são como sua soma TL, e, portanto, como as forças acelerativas com as quais os corpos T e L se atraem um ao outro, somadas às forças dos corpos T e L, a primeira para a primeira e a última para a última, compõem forças proporcionais às distâncias DT e DL como antes, mas somente maiores do que aquelas primeiras forças; e, portanto (pelo Corolário I, Proposição X, e Corolários I e VIII, Proposição IV), farão com que aqueles corpos descrevam elipses como antes, mas com um movimento mais rápido. As forças acelerativas remanescentes SD e DL, por causa das forças motoras SD.T e SD.L, que são como os corpos que atraem aqueles corpos igualmente e na direção das linhas TI, LK, paralelas a DS, não alteram de maneira alguma suas situações uma com relação a outra, mas fazem com que elas igualmente se aproximem da linha IK, a qual deve ser imaginada como que traçada através do meio do corpo S e perpendicularmente à linha DS. Mas aquela aproximação para a linha IK será obstruída, fazendo com que o sistema dos corpos T e L por um lado, e o corpo S por outro, com velocidades adequadas, girem em torno do centro comum de gravidade C. Com tal movimento, o corpo S – porque a soma das forças motoras SD.T e SD.L é proporcional à distância CS – tende para o centro C, e descreverá uma elipse em torno daquele; e o ponto D, como as linhas CS e CD são proporcionais, descreverá uma elipse semelhante em oposição a S. Mas os corpos T e L, atraídos pelas forças motoras SD.T e SD.L, o primeiro pela primeira e o último pela última, igualmente e na direção das linhas paralelas TI e LK, como foi dito antes, continuarão (pelos Corolários V e VI das Leis do Movimento) descrevendo suas elipses em torno do centro móvel D, como antes. Q.E.I.

Seja adicionado um quarto corpo V, e, por raciocínio semelhante, será demonstrado que este corpo e o ponto C descreverão elipses em torno do centro comum de gravidade B; com os movimentos dos corpos T, L e S, em torno dos centros D e C permanecendo os mesmos que antes, mas acelerados. E, pelo mesmo método, pode-se adicionar quantos corpos se quiser. Q.E.I.

Este seria o caso, embora os corpos T e L devessem atrair um ao outro com forças acelerativas maiores ou menores do que aquelas com as quais eles atraem os outros corpos, em proporção às suas distâncias. Estejam todas as atrações acelerativas uma para a outra como as distâncias multiplicadas para corpos que se atraem; e, a partir do que foi dito antes, facilmente se concluirá que todos os corpos descreverão diferentes elipses com tempos periódicos iguais, em torno do seu centro comum de gravidade B, em um plano imóvel. Q.E.I.

Proposição LXV. Teorema XXV

Corpos, cujas forças decrescem com o quadrado de suas distâncias a partir de seus centros, podem mover-se entre si em elipses; e por raios traçados até os focos, podem descrever áreas muito aproximadamente proporcionais aos tempos.

Na última Proposição, demonstramos o caso em que os movimentos são realizados exatamente em elipses. Quanto mais distante a lei das forças estiver da lei naquele caso, mais os corpos perturbarão os movimentos uns dos outros; tampouco é possível que os corpos que se atraem uns aos outros de acordo com a lei suposta nesta Proposição devam mover-se exatamente em elipses, a não ser mantendo uma certa proporção de distâncias uns dos outros. No entanto, nos casos que seguem, as órbitas não diferirão muito de elipses.

Caso 1 – Imagine vários corpos menores girando em torno de um muito grande a diferentes distâncias dele, e suponha forças absolutas que tendem para cada um dos corpos, proporcionais a cada um. E, como (pelo Corolário IV das Leis) o centro comum de gravidade de todos eles está em repouso, ou se move uniformemente para frente em uma linha reta, suponha que os corpos menores sejam tão pequenos que o corpo grande nunca possa estar a uma distância sensível daquele centro; e, então, o corpo grande, sem qualquer erro sensível, estará em repouso ou se movendo uniformemente em uma linha reta; e os menores girarão em torno daquele corpo grande em elipses, e, por raios traçados do centro até eles, descreverão áreas proporcionais aos tempos, se desprezarmos os erros que podem ser introduzidos quando o corpo grande se afasta do centro comum de gravidade, ou pelas ações dos corpos menores uns sobre os outros. Mas os corpos menores podem ser tão diminutos que este afastamento e as ações dos corpos uns sobre os outros podem tornar-se insignificantes; de forma que as órbitas podem se tornar elipses, e as áreas corresponderem aos tempos, sem qualquer erro significativo. Q.E.O.

Caso 2 – Imaginemos um sistema de corpos menores girando em torno de um corpo muito grande, da maneira há pouco descrita, ou qualquer outro sistema de dois corpos girando um em torno do outro, movendo-se uniformemente em uma linha reta, e, enquanto isso, impelido para os lados pela força de um outro corpo bem maior, situado a uma grande distância. E como as forças acelerativas iguais com as quais os corpos são impelidos em direções paralelas não mudam a situação dos corpos entre si, mas apenas forçam todo o sistema a mudar seu lugar, enquanto as partes ainda retêm

seus movimentos entre si, é evidente que nenhuma alteração naqueles movimentos dos corpos atraídos pode originar-se de suas atrações pelo maior, a não ser pela desigualdade das atrações acelerativas, ou pelas inclinações das linhas entre si, em cujas direções as atrações atuam. Suponha, portanto, que todas as atrações acelerativas exercidas na direção do corpo grande sejam, entre si, inversamente como os quadrados das distâncias; e, então, aumentando a distância do corpo grande até que as diferenças das linhas retas traçadas a partir dele até os outros com relação aos seus comprimentos, e as inclinações daquelas linhas umas com relação às outras, sejam menores do que qualquer grandeza dada, os movimentos das partes do sistema continuarão sem irregularidades maiores do que qualquer quantidade dada. E devido às pequenas distâncias daquelas partes entre si, todo o sistema é atraído como se fosse um corpo apenas; ele, portanto, mover-se-á por essa atração como se fosse um corpo; isto é, seu centro de gravidade descreverá uma das seções cônicas em torno do corpo grande (isto é, uma parábola ou hipérbole quando a atração é fraca, e uma elipse quando é mais forte); e, pelos raios traçados a partir desse lugar, descreverá áreas proporcionais aos tempos sem quaisquer irregularidades, a não ser aquelas que se originam das distâncias das partes, e essas são, pela hipótese, demasiadamente pequenas, e podem ser reduzidas arbitrariamente. Q.E.O.

Por um raciocínio semelhante, pode-se passar a casos mais complicados *in infinitum.*

COROLÁRIO I – No segundo Caso, quanto mais o corpo maior se aproximar do sistema de dois ou mais corpos girantes, maior será a perturbação dos movimentos das partes do sistema entre si, porque as inclinações das linhas traçadas a partir do corpo grande até as partes se tornarão maiores, e a desigualdade proporção será também maior.

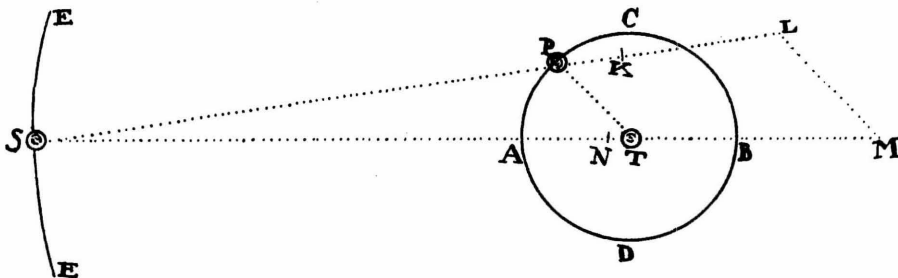
COROLÁRIO II – Mas a perturbação será a maior de todas se supormos que as atrações acelerativas das partes do sistema em direção ao maior de todos os corpos não estiverem, umas para as outras, como o inverso do quadrado das distâncias a partir daquele corpo maior; sobretudo se a diferença desta proporção for maior do que a desigualdade das proporções das distâncias a partir do corpo grande. Pois, se a força acelerativa, agindo *em direções* paralelas e iguais, não causar perturbação alguma nos movimentos das partes do sistema, ela deve, evidentemente, causar uma perturbação em algum lugar, quando agir desigualmente, que será maior ou menor à medida que a diferença for maior ou menor. O excesso dos impulsos maiores agindo sobre alguns corpos, e não sobre os outros, deve necessariamente alterar a situação destes corpos entre si. E esta perturbação, acrescida à perturbação

que se origina da desigualdade e da inclinação das linhas, faz com que a perturbação total seja maior.

COROLÁRIO III – Assim, se as partes desse sistema moverem-se em elipses ou círculos sem qualquer perturbação considerável, é evidente que, se todas elas são impelidas por forças acelerativas que tendem para quaisquer outros corpos, o impulso é muito fraco, ou, ainda imprimido quase que igualmente e em direção paralela sobre todas elas.

PROPOSIÇÃO LXVI. TEOREMA XXVI

Se três corpos, cujas forças decrescem com o quadrado das distâncias, atraem-se mutuamente; e as atrações acelerativas de quaisquer dois deles em direção ao terceiro estiverem entre si inversamente como os quadrados das distâncias; e os dois menores giram em torno do maior; afirmo que o mais interno dos dois corpos girantes, por raios traçados até o corpo mais interno e maior, descreverá em torno daquele corpo áreas mais proporcionais aos tempos, e uma figura que se aproxima mais de uma elipse com foco no ponto de interseção dos raios, se aquele corpo maior for agitado por aquelas atrações, do que descreveria se aquele corpo grande não fosse de maneira alguma atraído pelo menor, mas se mantivesse em repouso; ou do que descreveria se aquele corpo grande fosse muito mais ou muito menos atraído, ou muito mais ou muito menos agitado pelas atrações.

Isto torna-se bastante claro a partir da demonstração do segundo Corolário da Proposição precedente; mas também pode ser provado por um raciocínio mais diferenciado e universalmente convincente.

CASO 1 – Sejam P e S os corpos menores que giram no mesmo plano em torno do corpo maior T, o corpo P descrevendo a órbita interna PAB, e o corpo S a órbita externa ESE. Seja SK a distância média dos corpos P e S; e

faça a atração acelerativa do corpo P em direção a S, naquela distância média, ser representada pela linha SK. Tome SL para SK como o quadrado de SK para o quadrado de SP, e SL será a atração acelerativa do corpo P em direção a S a qualquer distância SP. Una PT e trace LM paralelamente a ela, encontrando ST em M; e a atração SL será decomposta (pelo Corolário II das Leis do Movimento) nas atrações SM, LM. E, assim, o corpo P será impelido com uma força acelerativa tríplice. Uma dessas forças tende em direção a T, e origina-se da atração mútua dos corpos T e P. Por essa força apenas, o corpo P descreveria em torno do corpo T, pelo raio PT, áreas proporcionais aos tempos, e uma elipse cujo foco está no centro do corpo T; e ele faria isto tanto se o corpo T se mantivesse imóvel, como se fosse agitado por aquela atração. Isto é conseqüência da Proposição XI, e Corolários II e III do Teorema XXI. A outra força é aquela da atração LM, a qual, como tende de P para T, será sobreposta à primeira força, coincidindo com ela; e fará com que as áreas ainda sejam proporcionais aos tempos, pelo Corolário III, Teorema XXI. Mas como ela não é inversamente proporcional ao quadrado da distância PT, comporá, quando adicionada à primeira uma força que é diferente daquela proporção; esta diferença sendo maior na medida em que a proporção dessa força com relação à primeira for maior, se nada mais for alterado. Portanto, uma vez que pela Proposição XI e pelo Corolário II do Teorema XXI, a força com a qual a elipse é descrita em torno do foco T deve estar dirigida para aquele foco e ser inversamente proporcional ao quadrado da distância PT, aquela força composta, diferindo daquela proporção, fará a órbita PAB ser diferente da forma de uma elipse com foco no ponto T; e tanto mais quanto maior for a diferença para com aquela proporção; e, conseqüentemente, tanto mais quanto maior for a proporção da segunda força LM para a primeira, se nada mais for alterado. Mas a terceira força SM, atraindo o corpo P em uma direção paralela a ST, compõe com as outras forças uma nova força que não está mais dirigida de P para T; e essa se afasta tanto mais dessa direção quanto maior for a proporção da terceira com relação às outras forças, se nada mais for alterado; e, portanto, faz com que o corpo P descreva, pelo raio TP, áreas que não são mais proporcionais aos tempos; e, assim faz com que a variação daquela proporcionalidade seja tanto maior quanto maior for a proporção dessa força com relação às outras. Mas essa terceira força aumentará a diferença da órbita PAB da figura elíptica antes mencionada, por duas razões: primeiro, porque aquela força não está dirigida de P para T; e, segundo, porque ela não é inversamente proporcional ao quadrado da distância PT. Tendo tudo isso como premissa, é evidente que as áreas serão, então, o mais aproximadamente proporcionais aos

tempos, quando aquela terceira força for a mínima possível, as restantes mantendo suas quantidades anteriores; e que a órbita PAB realmente aproximar-se-á o máximo da figura elíptica acima mencionada, quando tanto a segunda quanto a terceira, mas especialmente a terceira força, for a mínima possível; a primeira força mantendo sua quantidade original.

Seja a atração acelerativa do corpo T em direção a S representada pela linha SN; então, se as atrações acelerativas SM e SN fossem iguais, essas, atraindo os corpos T e P igualmente e em direções paralelas, não alterariam em nada a situação de um com relação ao outro. Os movimentos dos corpos entre si seriam os mesmos naquele caso, como se aquelas atrações não atuassem de maneira alguma, pelo Corolário VI das Leis do Movimento. E, por um raciocínio semelhante, e se a atração SN for menor do que a atração SM, ela eliminará a parte SN da atração SM, de modo que restará apenas a parte (da atração) MN para perturbar a proporcionalidade entre as áreas e os tempos, e a forma elíptica da órbita. E, de modo semelhante, se a atração SN for maior do que a atração SM, a perturbação da órbita e da proporção serão geradas apenas pela diferença MN.

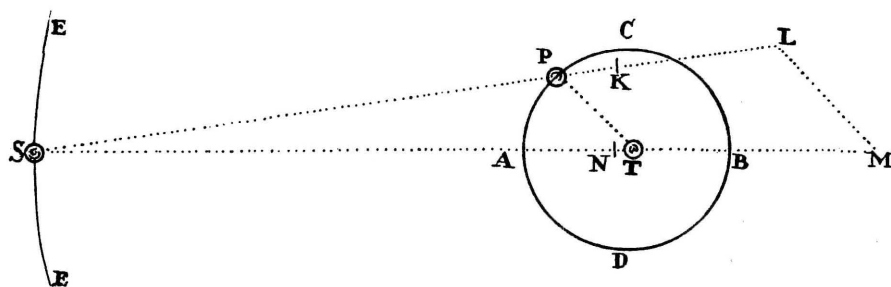
Dessa maneira, a atração SN sempre reduz a atração SM à atração MN, a primeira e segunda atrações permanecendo exatamente inalteradas; e, portanto, as áreas e os tempos aproximam-se o máximo da proporcionalidade, e a órbita PAB da forma elíptica mencionada acima, quando a atração MN é nula, ou a mínima possível; isto é, quando as atrações acelerativas dos corpos P e T aproximam-se o máximo possível da igualdade; ou seja, quando a atração SN não é nula, nem menor do que a mínima de todas as atrações SM, mas é uma média entre a maior e a menor de todas as atrações SM, isto é, nem muito maior nem muito menor do que a atração SK. Q.E.D.

Caso 2 – Faça girar, agora, os corpos menores P, S em torno de um maior, T, em planos diferentes; e a força LM, atuando na direção da linha PT situada no plano da órbita PAB, terá o mesmo efeito que antes; nem removerá o corpo P do plano de sua órbita. Mas a outra força NM, atuando na direção de uma linha paralela a ST (e, portanto, quando o corpo S está fora dos nodos, inclinada com relação ao plano da órbita PAB), além da perturbação do movimento há pouco mencionada com relação à longitude, introduz uma outra perturbação também quanto à latitude, ao atrair o corpo P para fora do plano de sua órbita. E essa perturbação, em qualquer situação dada dos corpos P e T um com relação ao outro, será como a força geradora MN; e, portanto, torna-se mínima quando a força MN for mínima, isto é (como foi agora mostrado), onde a atração SN não é muito maior nem menor do que a atração SK. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, pode ser facilmente inferido que, se vários corpos menores P, S, R etc., giram em torno de um corpo maior T, o movimento do mais interno corpo girante P será minimamente perturbado pelas atrações dos outros, quando o corpo grande for tanto atraído e agitado pelos restantes (de acordo com a razão das forças acelerativas) quanto os restantes o forem entre si.

COROLÁRIO II – Em um sistema de três corpos T, P, S, se as atrações acelerativas de quaisquer dois deles em direção a um terceiro forem inversamente entre si como os quadrados das distâncias, o corpo P, pelo raio PT, descreverá sua área em torno do corpo T mais rapidamente quando próximo da conjunção A e da oposição B, do que quando próximo das quadraturas C e D. Pois, qualquer força que atue sobre o corpo P e não sobre o corpo T, e que não atue na direção da linha PT, acelera ou retarda a descrição da área, dependendo de sua direção ser a mesma ou contrária àquele movimento do corpo. Assim é a força NM. Essa força, no trânsito do corpo P, de C para A, tende na direção em que o corpo está se movendo, e, portanto, acelera-o; e, então, até chegar a D, tende na direção oposta e retarda o movimento; depois tende na direção do corpo, até B; e, finalmente, em uma direção contrária, quando ele se move de B para C.

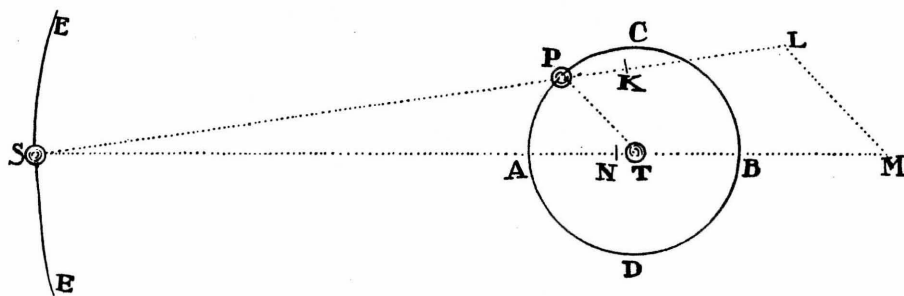
COROLÁRIO III – E, se nada for alterado, a partir do mesmo raciocínio, conclui-se que o corpo P move-se mais rapidamente na conjunção e na oposição do que nas quadraturas.

COROLÁRIO IV – Se nada for alterado, a órbita do corpo P é mais curvada nas quadraturas do que na conjunção e na oposição. Pois quanto mais rapidamente os corpos se movem, menos são desviados de uma linha reta. E, além disso, a força KL, ou NM, na conjunção e na oposição, é contrária à força com a qual o corpo T atrai o corpo P, e, portanto, diminui aquela força; mas o corpo P será menos desviado de uma trajetória retilínea quanto menos ele for impelido em direção ao corpo T.

COROLÁRIO V – Assim, se nada for alterado, o corpo P afasta-se mais do corpo T nas quadraturas do que na conjunção e na oposição. No entanto, isso pode ser afirmado se não for levada em conta a variação da excentricidade. Pois, se a órbita do corpo P for excêntrica, sua excentricidade (como será mostrado pelo Corolário IX) será máxima quando as apsides estão nas sizígias*, e assim, pode acontecer que o corpo P, em sua aproximação da apside mais longínqua, afaste-se mais do corpo T nas sizígias do que nas quadraturas.

COROLÁRIO VI – Uma vez que a força centrípeta do corpo central T, pela qual o corpo P é mantido na sua órbita, aumenta nas quadraturas pelo acréscimo causado pela força LM, e diminui nas sizígias pela subtração da força KL, e, como a força KL é maior do que LM, ela é mais diminuída que aumentada; e, além disso, uma vez que aquela força centrípeta (pelo Corolário II, Proposição IV) varia diretamente como o raio TP e inversamente como o quadrado do tempo periódico, é evidente que a razão resultante é diminuída pela ação da força KL; e, portanto, que o tempo periódico, supondo que o raio da órbita PT permaneça o mesmo, será aumentado como a raiz quadrada daquela razão na qual a força centrípeta é diminuída; e, portanto, supondo que esse raio seja aumentado ou diminuído, o tempo periódico será aumentado mais ou diminuído menos do que a potência 3/2 deste raio, pelo Corolário VI, Proposição IV. Se aquela força do corpo central decaísse gradualmente, o corpo P, sendo cada vez menos atraído, afastar-se-ia cada vez mais do centro T; e, ao contrário, se ela fosse aumentada, ele aproximar-se-ia dele. Portanto, se a ação do corpo distante S, pela qual aquela força é diminuída, aumentasse e diminuísse alternadamente, o raio TP também seria assim aumentado e diminuído; e o tempo periódico seria aumentado e diminuído em uma razão composta da potência 3/2 da razão do raio, e da raiz quadrada daquela razão na qual a força centrípeta do corpo central T foi diminuída ou aumentada, pelo acréscimo ou decréscimo da ação do corpo distante S.

COROLÁRIO VII – Segue também, pelo que foi explicado antes, que o eixo da elipse descrita pelo corpo P, ou a linha das apsides, obedece seu movimento angular, avançando e recuando alternadamente, porém mais avançando do que recuando, e pelo excesso do seu movimento direto, é, no final das contas, levado para a frente. Pois a força com a qual o corpo P é impelido para o corpo T nas quadraturas, onde a força MN desaparece, é composta da força LM e da força centrípeta com a qual o corpo T atrai o

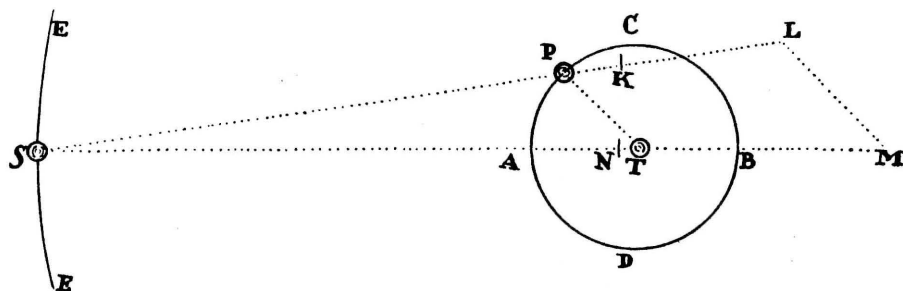
* Oposição de um astro (especialmente a Lua) como o Sol, observada no Plenilúnio e no Novilúnio, naquele caso (N.T.).

corpo P. Se a distância PT for aumentada, a primeira força LM também o será, quase na mesma proporção desta distância; e a outra força diminuirá com o quadrado da razão da distância; e, portanto, a soma dessas duas forças diminuirá menos do que o quadrado da razão da distância PT; e, portanto, pelo Corolário I, Proposição XLV, fará com que a linha das apsides ou, o que é a mesma coisa, a apside superior, retroceda. Mas na conjunção e na oposição, a força com a qual o corpo P é impelido em direção ao corpo T é a diferença entre a força KL, e a força com a qual o corpo T atrai o corpo P; e, porque a força KL é aumentada muito aproximadamente na razão da distância PT, aquela diferença diminui bem mais do que o quadrado da razão da distância PT; e, portanto, pelo Corolário I, Proposição XLV, faz com que a linha das apsides avance. Nos lugares entre as sizígias e as quadraturas, o movimento da linha das apsides depende dessas causas conjuntamente, de modo que ele avança ou retrocede, em proporção ao excesso de uma dessas causas sobre a outra. Assim, uma vez que a força KL nas sizígias é quase duas vezes maior do que a força LM nas quadraturas, o excesso estará a favor da força KL, e, conseqüentemente, a linha das apsides avançará. A veracidade deste e dos próximos Corolários será mais facilmente percebida se imaginarmos que o sistema dos dois corpos T e P é circundado por vários corpos S, S, S etc., dispostos sobre a órbita ESE. Pois pelas ações desses corpos, a ação do corpo T será diminuída em todos os lados, e diminuída bem mais do que o quadrado da razão da distância.

Corolário VIII – Mas, uma vez que o movimento direto ou retrógrado das apsides depende do acréscimo da força centrípeta, isto é, do fato de ela estar em uma razão maior ou menor do que do quadrado da distância TP, no trânsito do corpo da apside inferior para a superior; e de um acréscimo semelhante no seu retorno à apside inferior; e, portanto, torna-se máxima onde a proporção da força na apside superior para a força na apside inferior afasta-se no máximo possível do inverso do quadrado da razão das

distâncias; é evidente que, quando estão nas sizígias, as apsides avançarão mais rapidamente, em função da força subtraída KL ou NM - LM; e nas quadraturas, retrocederão mais lentamente, pela força adicional LM. Como a velocidade da progressão ou a lentidão do retrocesso continua por um longo tempo, essa irregularidade torna-se extremamente grande.

COROLÁRIO IX – Se, por uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância a partir de qualquer centro, um corpo é obrigado a girar em uma elipse em torno daquele centro; e, posteriormente, na sua descida da apside superior para a inferior, aquela força é aumentada em mais do que o quadrado da razão da distância diminuída, pelo acréscimo contínuo de nova força; é evidente que, sendo impelido sempre em direção ao centro pelo acréscimo contínuo dessa nova força, o corpo inclinar-se-á mais em direção àquele centro do que se ele fosse impelido por aquela força sozinha, a qual diminui como o quadrado da distância diminuída, e, portanto, descreverá uma órbita interior àquela órbita elíptica, e na apside inferior se aproximará mais do centro do que antes. Assim, pelo acréscimo dessa nova força, a órbita tornar-se-á mais excêntrica. Agora, se enquanto o corpo estiver retornando da apside inferior para a superior, a força decrescesse nos mesmos graus em que aumentava antes, ele retornaria à sua primeira distância; e, portanto, se a força diminuísse em uma razão ainda maior, o corpo, sendo agora menos atraído do que antes, ascenderia a uma distância ainda maior, e, assim, a excentricidade da órbita seria aumentada ainda mais. Portanto, se a razão do aumento e do decréscimo da força centrípeta aumentar a cada revolução, a excentricidade também aumentará; e, ao contrário, se aquela razão diminuir, a excentricidade diminuirá.

Portanto, no sistema dos corpos T, P, S quando as apsides da órbita PAB estão nas quadraturas, a razão daquele aumento e daquele decréscimo é a menor de todas, e torna-se a maior quando as apsides estão nas sizígias. Se as apsides localizarem-se nas quadraturas, a razão na proximidade das apsides é menor, e na proximidade das sizígias é maior, do que o quadrado da razão das distâncias; e, a partir daquela razão maior, surge um movimento direto da linha das apsides, como foi dito acima. Mas, se considerarmos a razão de todo o acréscimo ou decréscimo na progressão entre as apsides, ela é menor do que o quadrado da razão das distâncias. A força na apside inferior está para aquela na superior menos do que o quadrado da razão entre a distância da apside superior e o foco da elipse e a distância entre a apside inferior e o mesmo foco; e, ao contrário, quando as apsides estão localizadas nas sizígias, a força na apside inferior está para a força na apside superior mais do que o quadrado da razão das distâncias. Pois as forças LM, nas

quadraturas adicionadas do corpo T, compõem forças em uma razão menor; e as forças KL nas sizígias subtraídas das forças do corpo T, resultam em forças em uma razão maior. Assim, a razão dos acréscimos e decréscimos, no trânsito entre as apsides, é mínima nas quadraturas e máxima nas sizígias; e, portanto, no trânsito das apsides a partir das quadraturas para as sizígias, é continuamente aumentada, e faz com que a excentricidade da elipse aumente; e no trânsito das sizígias para as quadraturas, diminui continuamente e faz a excentricidade diminuir.

COROLÁRIO X – Uma vez que podemos explicar os desvios de latitude, suponhamos que o plano da órbita EST permaneça imóvel; e, a partir da causa dos desvios explicada acima, é evidente que, das duas forças NM, ML, que são as únicas causas deles, a força ML nunca perturba os movimentos com relação à latitude, pois atua sempre no plano da órbita PAB; e quando os nodos estão nas sizídias,a força NM não afeta aqueles movimentos naquele tempo, pois atua também no mesmo plano da órbita. Mas quando os nodos estão nas quadraturas, perturba-os muito, e atraindo o corpo P continuamente para fora do plano de sua órbita, diminui a inclinação do plano na passagem do corpo das quadraturas para as sizígias, e novamente aumenta-a na passagem do corpo das sizígias para as quadraturas. Assim ocorre que, quando o corpo está nas sizígias, a inclinação é, então, a menor de todas, e quase retorna à grandeza original quando o corpo chega ao próximo nodo. Mas, se os nodos estão situados nos octantes depois das quadraturas, isto é, entre C e A, D e B, tornar-se-á óbvio, pelo mostrado acima, que a inclinação do plano será continuamente diminuída no trânsito do corpo P a partir de qualquer nodo para o nonagésimo grau seguinte; então, no trânsito pelos próximos 45 graus até a próxima quadratura, a inclinação será aumentada; e, posteriormente, no seu trânsito pelos outros 45 graus até o próximo nodo, será novamente diminuída. Assim, a inclinação será mais diminuída do que aumentada, e será, portanto, sempre menor no nodo subseqüente do que no

precedente. E, pelo mesmo raciocínio, a inclinação será mais aumentada do que diminuída quando os nodos estiverem nos outros octantes entre A e D, B e C. A inclinação, assim, é máxima quando os nodos estão nas sizígias. No seu trânsito das sizígias para as quadraturas, a inclinação é diminuída a cada apulso* do corpo para os nodos; e torna-se mínima quando os nodos estão nas quadraturas, e o corpo nas sizígias; então, aumenta nos mesmos graus pelos quais ela diminuiu antes; e retorna à sua grandeza original quando os nodos chegam às próximas sizígias.

COROLÁRIO XI – Sendo que quando os nodos estão nas quadraturas, o corpo P é continuamente atraído para fora do plano de sua órbita; e como essa atração é exercida em direção a S em sua passagem do nodo C, através da conjunção A, para o nodo D; e, na direção oposta, na sua passagem do nodo D, através da oposição B, para o nodo C; é evidente que, no seu movimento a partir do nodo C, o corpo afasta-se continuamente do plano original CD de sua órbita, até chegar ao próximo nodo; e, portanto, naquele nodo, estando agora na sua maior distância a partir do primeiro plano CD, o corpo passará através do plano da órbita EST não em D, o outro nodo daquele plano, mas em um ponto que está mais próximo ao corpo S, o qual, assim, torna-se um novo lugar do nodo atrás do seu original. E, pelo mesmo raciocínio, os nodos continuarão a retroceder no trânsito a partir desse nodo para o próximo. Assim, quando situados nas quadraturas, os nodos retrocedem continuamente; e nas sizígias, onde nenhuma perturbação pode ser produzida no movimento com relação à latitude, são quiescentes; nos lugares intermediários, eles compartilham ambas as condições e retrocedem mais vagarosamente; e, assim, sendo sempre ou retrógrados ou estacionários, serão puxados para trás, ou forçados a retrocederem a cada revolução.

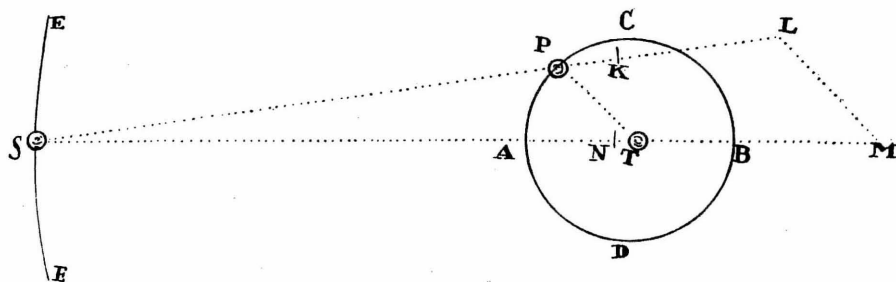
COROLÁRIO XII – Todos os desvios descritos nestes Corolários são um pouco maiores na conjunção dos corpos P, S do que na sua oposição, porque as forças geradoras NM e ML são maiores.

COROLÁRIO XIII – E, uma vez que as causas e proporções dos desvios e variações mencionadas nestes Corolários não dependem da grandeza do corpo S, segue que tudo o que foi demonstrado anteriormente acontecerá, se a grandeza do corpo S for imaginada como tão grande que o sistema dos dois corpos P e T possa girar em torno dele. E, a partir desse aumento do corpo S, e do conseqüente aumento de sua força centrípeta, a partir da qual se originam os desvios do corpo P, segue que todos esses desvios, a distân-

* Configuração celeste na qual dois astros se encontram a uma distância aparente muito pequena (N.T.).

cias iguais, serão maiores nesse caso do que no outro, em que o corpo S gira em torno do sistema dos corpos P e T.

COROLÁRIO XIV – Mas, uma vez que, quando o corpo S está extremamente distante, as forças NM, ML são muito aproximadamente como a força SK e a razão de PT para ST conjuntamente; isto é, se tanto a distância PT como a força absoluta do corpo S forem dadas, inversamente como ST^3; e uma vez que aquelas forças NM, ML são as causas de todos os desvios e efeitos tratados nos Corolários anteriores; é evidente que, se o sistema de corpos T e P continuar como antes, e somente a distância ST e a força absoluta do corpo S forem alteradas, todos aqueles efeitos estarão muito aproximadamente em uma razão composta pela razão direta da força absoluta do corpo S e pela razão cúbica inversa da distância ST. Assim, se o sistema de corpos T e P girar em torno de um corpo distante S, aquelas forças NM, ML, e seus efeitos, serão inversamente proporcionais ao quadrado do tempo periódico (pelos Corolários II e VI, Proposição IV). E assim, também, se a grandeza do corpo S for proporcional à sua força absoluta, aquelas forças NM, ML, e seus efeitos, serão diretamente como o cubo do diâmetro aparente do corpo distante S visto a partir de T; e vice-versa. Pois essas razões são as mesmas que as razões compostas mencionadas acima.

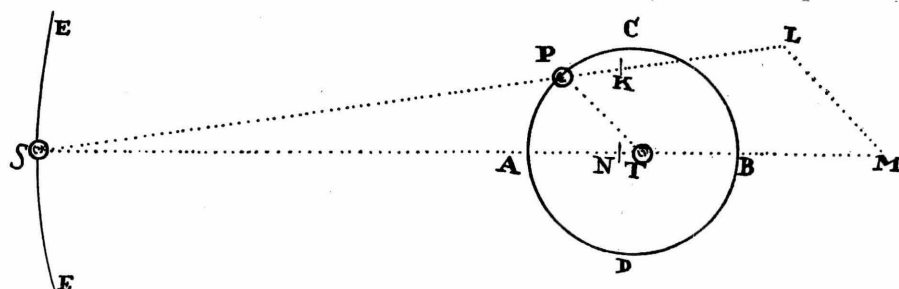
COROLÁRIO XV – Se, mantendo suas formas, proporções e inclinações uma para a outra, as órbitas ESE e PAB tivessem suas grandezas alteradas, e se as forças dos corpos S e T permanecessem inalteradas ou fossem alteradas em qualquer razão dada, então essas forças (isto é, a força do corpo T, que força o corpo P a desviar-se de um curso retilíneo na órbita PAB, e a força do corpo S, que faz o corpo P desviar-se daquela órbita) atuarão sempre da mesma maneira e na mesma proporção. Conseqüentemente, segue que todos os efeitos serão semelhantes e proporcionais, e os tempos daqueles efeitos também serão proporcionais; isto é, todos os desvios lineares serão como os diâmetros das órbitas, sendo que os desvios angulares permanecerão os mesmos; e os tempos de desvios lineares semelhantes, ou desvios angulares iguais, serão como os tempos periódicos das órbitas.

COROLÁRIO XVI – Assim, se as formas das órbitas e suas inclinações uma para a outra forem dadas, e as grandezas, forças e distâncias dos corpos forem alteradas de uma maneira qualquer, podemos obter muito aproximadamente os desvios e seus tempos em qualquer outro caso, a partir dos desvios e seus correspondentes tempos em um caso particular. Mas isso pode ser feito mais brevemente pelo seguinte método: outras coisas permanecendo inalteradas, as forças NM, ML são como o raio TP; e (pelo Corolário II, Lema X) seus efeitos periódicos são como as forças e o quadrado do tempo periódico do corpo P conjuntamente. Esses são os desvios lineares do corpo P; e, assim, à medida que se originam a partir do centro T, os desvios angulares (isto é, o movimento das apsides e dos nodos, e todos os desvios aparentes de longitude e latitude) são, em cada revolução do corpo P, muito aproximadamente como o quadrado do tempo da revolução. Sejam essas razões compostas com as razões no Corolário XIV, e em qualquer sistema de corpos T, P, S, em que P gira em torno de T muito próximo a esse, e T gira em torno de S a uma grande distância, observados a partir do centro T, os desvios angulares do corpo P em cada revolução serão diretamente como o quadrado do tempo periódico do corpo P, e inversamente como o quadrado do tempo periódico do corpo T. E, portanto, o movimento médio da linha das apsides estará em uma dada razão para o movimento médio dos nodos; e esses dois movimentos serão diretamente como o tempo periódico do corpo P e inversamente como o quadrado do tempo periódico do corpo T. O aumento ou a diminuição da excentricidade e da inclinação da órbita PAB não produz variação sensível nos movimentos das apsides e dos nodos, a não ser que esse aumento ou essa diminuição sejam, de fato, muito grandes.

COROLÁRIO XVII – Uma vez que a linha LM torna-se, às vezes maior, às vezes menor do que o raio PT, seja a quantidade média da força LM representada pelo raio PT; e, então, aquela força média estará para a força média SK ou SN (que também pode ser representada por ST) como o comprimento PT está para o comprimento ST. Mas a força média SN ou ST, pela qual o corpo T é retido na órbita por ele descrita em torno de S, está para a força com a qual o corpo P é retido na sua órbita em torno de T, em uma razão composta da razão do raio ST para o raio PT, e do quadrado da razão do tempo periódico do corpo P em torno de T para o tempo periódico do corpo T em torno de S. E, conseqüentemente, a força média LM está para a força pela qual o corpo P é retido em sua órbita em torno de T (ou pela qual o mesmo corpo P pode girar, na distância PT, no mesmo tempo periódico, em torno de qualquer ponto imóvel T) na mesma razão quadrada dos tempos periódicos. Portanto, sendo dados os tempos periódicos, juntamente

com a distância PT, a força média LM também é dada; e aquela força sendo dada, também é dada, muito aproximadamente, a força MN, pela analogia das linhas PT e MN.

COROLÁRIO XVIII – Pelas mesmas leis pelas quais o corpo P gira em torno do corpo T, suponha que muitos corpos fluidos movam-se em torno de T a iguais distâncias dele; e que sejam tão numerosos que possam todos se tornarem contíguos um ao outro, formando um anel fluido de forma redonda e concêntrico ao corpo T; e as várias partes desse anel, realizando seus movimentos pela mesma lei que o corpo P, aproximar-se-ão mais do corpo T e mover-se-ão mais rapidamente nas suas conjunções e oposições com relação ao corpo S, do que nas quadraturas. E os nodos desse anel ou suas intersecções com o plano da órbita do corpo S ou T repousarão nas sizígias; mas fora daí, eles serão puxados para trás, ou em uma direção retrógrada, com máxima rapidez nas quadraturas e mais lentamente em outros lugares. A inclinação desse anel também variará, e seu eixo oscilará em cada revolução, e, quando a revolução for completada, retornará à sua situação original, com exceção apenas de que será levado a girar um pouco por causa da precessão dos nodos.

COROLÁRIO XIX – Suponha agora que o corpo esférico T, consistindo de alguma matéria não fluida, seja aumentado e estendido para todos os lados, tão longe quanto aquele anel, e que um canal contendo água seja construído em torno de sua circunferência; e que essa esfera gire uniformemente em torno de seu próprio eixo, no mesmo tempo periódico. Essa água, sendo alternadamente acelerada e retardada (como no último Corolário), será mais rápida nas sizígias, e mais lenta nas quadraturas, do que a superfície do globo e, assim, vazará e fluirá no seu canal do mesmo modo que o mar. Se a atração do corpo S fosse eliminada, a água não adquiriria qualquer movimento de fluxo e refluxo por girar em torno do centro quiescente do globo. Esse é o mesmo caso de um globo que se move uniformemente para a frente em uma linha reta e que, enquanto isso, gira em torno de seu centro (pelo Corolário V das Leis do Movimento) e de um globo uniformemente atraído para fora de seu curso retilíneo (pelo Corolário VI das mesmas Leis). Mas se o corpo S atuar, e por sua atração variável a água receber esse novo movimento; pois haverá uma atração mais forte sobre aquela parte da água que está mais próxima do corpo e uma mais fraca sobre aquela parte que está mais afastada. E a força LM atrairá a água para baixo nas quadraturas, comprimindo-a até que chegue às sizígias; e a força KL a atrairá para cima nas sizígias, e deterá sua descida e fará com que ela suba até que chegue às quadraturas; até aqui, a única exceção é que o movimento de

fluxo e refluxo possa ser direcionado pelo canal e ser um pouco retardado por fricção.

COROLÁRIO XX – Mas se o anel tornar-se rígido, e o globo for diminuído, o movimento de fluxo e refluxo cessará; mas o movimento oscilatório da inclinação e a precessão dos nodos permanecerão. Considere que o globo tenha o mesmo eixo que o anel e realize suas revoluções nos mesmos tempos e, na sua superfície, toque o anel por dentro, aderindo a ele; então, o corpo inteiro, constituído do globo que compartilha do movimento do anel, oscilará e os nodos retrocederão, pois o globo, como demonstraremos a seguir, fica totalmente indiferente ao receber esses impulsos. O maior ângulo de inclinação do anel sozinho ocorre quando os nodos estão nas sizígias. Assim, no trânsito dos nodos para as quadraturas, ele tende a diminuir sua inclinação e, por esse esforço, imprime um movimento ao globo inteiro. O globo retém esse movimento imprimido, até que o anel, por um esforço contrário, destrua aquele movimento e imprima um novo movimento em uma direção contrária. E, dessa maneira, o maior movimento de inclinação decrescente acontece quando os nodos estão nas quadraturas, e o menor ângulo de inclinação nos octantes, após as quadraturas; e, novamente, o maior movimento de reclinação ocorre quando os nodos estão nas sizígias; e o maior ângulo de inclinação, nos octantes subseqüentes. E esse é o caso para um globo sem esse anel, se ele for um pouco mais alto ou mais denso na região equatorial do que nas polares; pois o excesso daquela matéria nas regiões próximas ao equador faz o papel do anel. E, ainda que devamos supor que força centrípeta desse globo seja aumentada de qualquer maneira, de modo que todas as suas partes tendam para baixo, como as partes da Terra gravitam para o centro, ainda assim os fenômenos deste e do Corolário precedente provavelmente não seriam alterados; exceto que os lugares das alturas maior e menor da água serão diferentes; pois a água, agora, não mais é sustentada e mantida na sua órbita pela sua força centrípeta, mas pelo

canal no qual ela flui. Além disso, a força LM atrai a água para baixo mais acentuadamente nas quadraturas, e a força KL ou NM - LM a atrai para cima principalmente nas sizígias. E essas forças juntas deixam de atrair a água para baixo e começam a atraí-la para cima nos octantes antes das sizígias; e deixam de atrair a água para cima e começam a atraí-la para baixo nos octantes após as sizígias. Assim, a altura máxima da água pode correr em torno dos octantes após as sizígias; e a altura mínima, em torno dos octantes após as quadraturas. A única exceção até aqui é com relação aos movimentos de subida ou descida imprimidos por essas forças, os quais, pela inércia da água, podem continuar um pouco mais, ou ser interrompidos um pouco antes pelos impedimentos no canal.

COROLÁRIO XXI – Pela mesma razão, aquela matéria redundante nas regiões equatoriais de um globo faz com que os nodos retrocedam, e, portanto, pelo aumento daquela matéria, esse movimento retrógrado é aumentado, pela diminuição é diminuído, e, pela remoção, cessa completamente; segue que, se mais do que aquela matéria redundante for removida, isto é, se o globo apresentar uma depressão equatorial, ou de uma consistência mais rarefeita próximo ao equador dos que nos pólos, surgirá um movimento direto dos nodos.

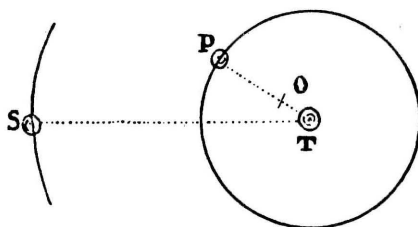
COROLÁRIO XXII – E, assim, a partir do movimento dos nodos, a constituição do globo é conhecida. Isto é, se o globo retiver os mesmos pólos sem alterações, e o movimento (dos nodos) for retrógrado, haverá uma redundância da matéria próxima do equador; mas se aquele movimento for direto, haverá uma deficiência. Suponha que um globo uniforme e exatamente esférico esteja originalmente em repouso em um espaço livre; então, por algum impulso aplicado obliquamente sobre sua superfície, seja ele deslocado do seu lugar, adquirindo um movimento para frente, em parte circular, em parte retilíneo. Uma vez que esse globo é perfeitamente indiferente a todos os eixos que passam através do seu centro, e não tem uma propensão maior para um eixo nem para uma orientação de um eixo para com outro, é evidente que, por sua própria força, ele jamais alterará seu eixo, ou a inclinação deste.

Considere, agora, que esse globo seja impelido obliquamente por novo impulso, aplicado na mesma parte de sua superfície como anteriormente; e uma vez que o efeito de um impulso não é, de maneira alguma, alterado pelo fato de ele ocorrer mais cedo ou mais tarde, é evidente que esses dois impulsos, sucessivamente imprimidos, produzirão o mesmo movimento, como se tivessem sido imprimidos ao mesmo tempo. Isto é, produzirão o mesmo movimento, como se o globo tivesse sido impelido por uma

única força, composta de ambas (pelo Corolário II das Leis), isto é, um movimento simples em torno de um eixo com uma dada inclinação. E seria o mesmo caso se o segundo fosse aplicado em qualquer outro lugar do equador do primeiro movimento; e, também, se o primeiro impulso fosse aplicado em qualquer lugar no equador do movimento que seria gerado apenas pelo segundo impulso; e, portanto, também, quando ambos os impulsos são aplicados em quaisquer lugares; pois esses impulsos gerarão o mesmo movimento circular, como se fossem imprimidos juntos e simultaneamente, no lugar das intersecções dos equadores desses movimentos, os quais seriam gerados por cada um deles separadamente. Portanto, um globo homogêneo e perfeito não reterá vários movimentos distintos, mas unirá todos aqueles que foram imprimidos sobre ele, e reduzi-los-á a um único; girando, tanto quanto possível com esse movimento, sempre de maneira única e uniforme em torno de um único eixo dado, com uma inclinação sempre variável. E a inclinação do eixo, ou a velocidade da rotação, não será alterada pela força centrípeta. Pois, supondo que o globo seja dividido em dois hemisférios, por qualquer plano que passe através de seu próprio centro, que é para o qual está dirigida, essa força sempre impelirá cada hemisfério igualmente; e, assim, não inclinará o globo para nenhum lado, com respeito ao seu movimento em torno de seu próprio eixo. Mas imagine que, em qualquer lugar entre o pólo e o equador, seja acrescentado um acúmulo de matéria nova, como uma montanha, e esse, por seu esforço contínuo para afastar-se do centro de seu movimento, perturbará o movimento do globo e fará com que seus pólos excursionem sobre a sua superfície, descrevendo círculos em torno de si mesmos e dos pontos opostos a eles. Esse enorme desvio dos pólos não pode ser corrigido de outra forma que não a de localizar aquela montanha em um dos pólos (nesse caso, pelo Corolário XXI, os nodos do equador avançarão), ou nas regiões equatoriais (nesse caso, pelo Corolário XX, os nodos retrocederão); ou, finalmente, acrescentando ao outro lado do eixo uma nova quantidade de matéria, pela qual a montanha pode ser equilibrada em seu movimento; e, então, os nodos irão para frente ou para trás, dependendo de a montanha e dessa matéria recentemente acrescentada estarem mais próximas do pólo ou do equador.

Proposição LXVII. Teorema XXVII

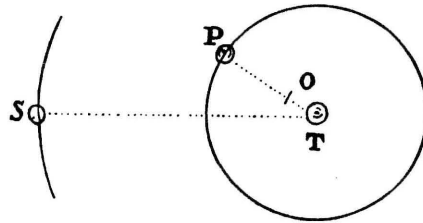
Supondo as mesmas leis de atração, afirmo que o corpo exterior S, *pelos raios traçados até o ponto* O, *o centro comum de gravidade dos corpos interiores* P

e T, *de fato descreve em torno daquele centro áreas mais proporcionais aos tempos, e uma órbita que se aproxima mais da forma de uma elipse com seu foco naquele centro, do que pode descrever em torno do mais interno e maior corpo* T *pelos raios traçados até esse corpo.*

Pois as atrações do corpo S em direção a T e P compõem sua atração absoluta, a qual é mais dirigida a O, o centro comum de gravidade dos corpos T e P, do que ao corpo maior T; e que se aproxima mais da proporção inversa do quadrado da distância SO do que do quadrado da distância ST; o que será facilmente visto por uma pequena consideração.

Proposição LXVIII. Teorema XXVIII

Supondo as mesmas leis de atração, afirmo que o corpo exterior S, *pelos raios traçados até* O, *o centro comum de gravidade dos corpos interiores* P *e* T, *descreverá em torno desse centro áreas mais proporcionais aos tempos, e uma órbita que se aproxima mais da forma de uma elipse com seu foco nesse centro, se o corpo mais interno e maior for agitado por essas atrações tanto quanto os outros, do que ele descreveria se aquele corpo estivesse em repouso e não fosse atraído de forma alguma, ou fosse muito mais ou muito menos atraído, ou fosse muito mais ou muito menos agitado.*

Isso pode ser demonstrado da mesma maneira que a Proposição LXVI, mas por meio de um raciocínio mais prolixo, que passo agora a desenvolver. Será suficiente considerá-lo do seguinte modo. Pela demonstração da última Proposição, é evidente que o centro, em direção ao qual o corpo S é impelido pelas duas forças conjuntamente, está muito próximo ao centro comum de gravidade daqueles dois outros corpos. Se esse centro coincidisse com aquele centro comum, é, além disso, o centro comum de gravidade de todos os três corpos estivesse em repouso, o corpo S, por um lado, e o centro comum de gravidade dos outros dois corpos por outro lado, descre-

veriam verdadeiras elipses em torno daquele centro comum quiescente. Isso é uma conseqüência do Corolário II, Proposição LVIII, comparado com o que foi demonstrado nas Proposições LXIV e LXV. Porém, esse movimento elíptico exato será um pouco perturbado pela distância do centro dos dois corpos a partir do centro em direção ao qual o terceiro corpo S é atraído. Seja acrescentado, além disso, um movimento ao centro comum dos três, e a perturbação será aumentada ainda mais. Portanto, a perturbação é mínima quando o centro comum dos três corpos está em repouso; isto é, quando o corpo mais interno e maior, T, é atraído de acordo com a mesma lei com que os restantes o são; e é sempre máxima quando o centro comum dos três, pela diminuição do movimento do corpo T, começa a ser movido, sendo cada vez mais agitado.

Corolário – E, assim, se vários corpos menores giram em torno de um grande, pode ser facilmente inferido que as órbitas descritas serão quase elípticas. E, se todos os corpos se atraem e se agitam uns aos outros com forças acelerativas que são diretamente como suas forças absolutas e inversamente como os quadrados das distâncias, e, se o foco de cada órbita estiver localizado no centro de gravidade comum de todos os corpos interiores (isto é, se o foco da primeira e mais interna das órbitas estiver localizado no centro de gravidade do corpo maior e mais interno; o foco da segunda órbita no centro comum de gravidade dos dois corpos mais internos; o foco da terceira órbita no centro comum de gravidade dos três mais internos; e assim por diante), as descrições de áreas seriam mais uniformes do que se o corpo mais interno estivesse em repouso, e se tornasse o foco comum de todas as órbitas.

Proposição LXIX. Teorema XXIX

Se, em um sistema de vários corpos A, B C, D *etc., qualquer um desses corpos, como* A, *atrair os restantes,* B, C, D *etc., com forças acelerativas que são*

inversamente como os quadrados das distâncias a partir do corpo atrativo; e um corpo, como B, *atrair também os restantes* A, C, D *etc., com forças que são inversamente como os quadrados das distâncias a partir do corpo atrativo; as forças absolutas dos corpos atrativos* A *e* B *estarão uma para a outra como os próprios corpos* A *e* B, *aos quais essas forças pertencem.*

Pois as atrações acelerativas de todos os corpos B, C, D, em direção a A, são, por suposição, iguais umas às outras a distâncias iguais; e, da mesma forma, as atrações acelerativas de todos os corpos em direção a B são também iguais umas às outras a distâncias iguais. Mas a força atrativa absoluta do corpo A está para a força atrativa absoluta do corpo B como a atração acelerativa de todos os corpos em direção a A está para a atração acelerativa de todos os corpos em direção a B, a iguais distâncias; e assim também a atração acelerativa do corpo B em direção a A está para a atração acelerativa do corpo A em direção a B. Mas a atração acelerativa do corpo B em direção a A está para a atração acelerativa do corpo A em direção a B como a massa de A está para a massa de B; porque as forças motoras são (pelas segunda, sétima e oitava Definições) como as forças acelerativas, e os corpos, atraídos conjuntamente, são aqui iguais um ao outro pela terceira Lei. Assim, a força atrativa absoluta do corpo A está para força atrativa absoluta do corpo B como a massa de A para a massa de B. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se cada um dos corpos do sistema A, B, C, D etc., de fato, atrair individualmente todos os restantes com forças acelerativas que são inversamente como os quadrados das distâncias a partir do corpo atrativo, as forças absolutas de todos aqueles corpos estarão umas para as outras como os próprios corpos.

COROLÁRIO II – Por um raciocínio semelhante, se cada um dos corpos do sistema, A, B, C, D etc., atrair individualmente todos os restantes com forças acelerativas que estão inversamente ou diretamente na razão de qualquer potência das distâncias a partir do corpo atrativo; ou que são definidas pelas distâncias a partir de cada um dos corpos atrativos de acordo com qualquer lei comum; é evidente que as forças absolutas daqueles corpos são como os próprios corpos.

COROLÁRIO III – Em um sistema de corpos cujas forças decrescem como o quadrado das distâncias, se o menor girar em torno de um muito grande em elipses, com seu foco comum no centro deste grande corpo, e descrevendo uma figura extremamente exata; e, além disso, por meio de raios traçados até esse corpo grande, descrevem áreas exatamente proporcionais aos tempos; as forças absolutas daqueles corpos estarão exatamente, ou

muito aproximadamente, na razão dos corpos. E assim, o contrário é também verdadeiro. Isso é conseqüência do Corolário da Proposição XLVIII, comparado com o primeiro Corolário desta Proposição.

Escólio

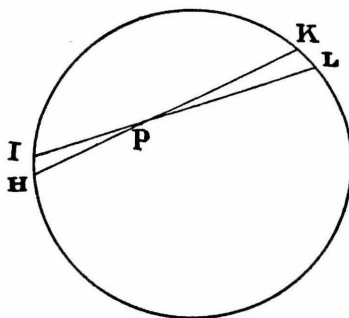
Essas Proposições naturalmente nos levam à analogia que existe entre forças centrípetas e os corpos centrais para os quais essas forças estão normalmente dirigidas; pois é razoável supor que forças que são dirigidas para os corpos devem depender da natureza e da quantidade desses corpos, como vemos acontecer em experimentos magnéticos. E quando tais casos ocorrem, devemos computar as atrações dos corpos, atribuindo a cada uma de suas partículas sua força apropriada, e então encontrando a soma de todas elas. Aqui emprego a palavra *atração* em sentido geral, para qualquer esforço feito por corpos para se aproximarem uns dos outros, seja esse esforço oriundo da ação dos próprios corpos, como quando tendem uns para os outros ou se agitam uns aos outros por influências* emitidas; ou decorra da ação do éter ou do ar, ou de qualquer que seja o meio, corpóreo ou incorpóreo, impelindo corpos ali localizados, de alguma maneira, uns em direção aos outros. No mesmo sentido geral, emprego a palavra *impulso*, sem definir, neste tratado, as naturezas ou qualidades físicas de forças, mas investigando as quantidades e suas proporções matemáticas, como observei anteriormente nas Definições. Em Matemática, devemos investigar as quantidades de forças com suas proporções conseqüentes sob quaisquer condições supostas; então, quando consideramos a Física, comparamos essas proporções com os fenômenos da Natureza, a fim de saber que condições dessas forças correspondem aos vários tipos de corpos atrativos. Tendo em vista essas considerações, argumentaremos com maior segurança no que se refere às naturezas físicas, causas e proporções das forças. Vejamos, então, com que forças os corpos esféricos que consistem de partículas dotadas de poderes atrativos, como os acima mencionados, devem atuar uns sobre os outros: e que tipo de movimentos resultarão daí.

* No Original, "Spirits".

» SEÇÃO XII

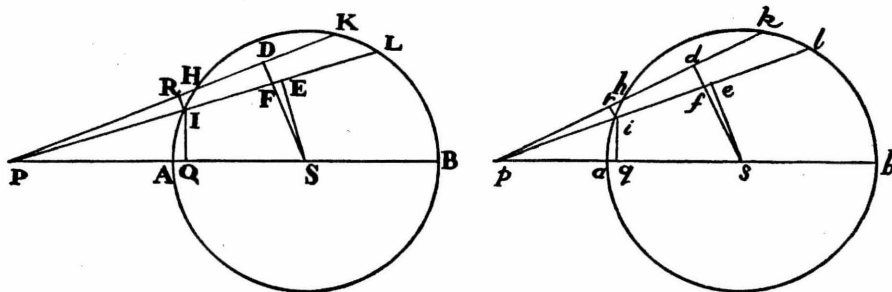
As forças atrativas de corpos esféricos

PROPOSIÇÃO LXX. TEOREMA XXX

Se, para cada ponto de uma superfície tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem como o quadrado das distâncias a partir desses pontos, afirmo que um corpúsculo localizado dentro daquela superfície não será atraído de maneira alguma por aquelas forças.

Seja HIKL aquela superfície esférica, e P um corpúsculo localizado dentro dela. Através de P, trace em direção a essa superfície duas linhas HK, IL, interceptando arcos muito pequenos HI, KL; e como (pelo Corolário III,

Lema VII) os triângulos HPI, LPK são semelhantes, esses arcos serão proporcionais às distâncias HP, LP; e, em HI e KL, delimitadas por linhas retas que passam através de P, quaisquer partículas da superfície esférica serão como o quadrado daquelas distâncias. Portanto, as forças dessas partículas exercidas sobre o corpo P serão iguais entre si. Pois as forças são diretamente proporcionais às partículas e inversamente proporcionais ao quadrado das distâncias. E essas duas razões compõem a razão de igualdade, 1:1. Assim, sendo iguais, mas exercidas em direções opostas, as atrações anulam-se entre si. E, pelo mesmo raciocínio, todas as atrações, através de toda a superfície esférica, são destruídas por atrações contrárias. Portanto, o corpo P não será de forma alguma impelido por essas atrações. Q.E.D.

Proposição LXXI. Teorema XXXI

Supondo-se o mesmo que acima, afirmo que um corpúsculo localizado fora da superfície esférica é atraído em direção ao centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até este centro.

Sejam AHKB, *ahkb* duas superfícies iguais descritas em torno dos centros S, *s*; seus diâmetros, AB, *ab*; e sejam P e *p* dois corpúsculos fora das esferas nesses diâmetros estendidos. A partir dos corpúsculos, trace as linhas PHK, PIL, *phk, pil*, destacando dos grandes círculos AHB, *ahb*, os arcos iguais HK, *hk*, IL, *il*; e, perpendicularmente a essas linhas, trace SD, *sd*, SE, *se*, IR, *ir*; dessas, faça SD, *sd* cortarem PL, *pl*, em F e *f*. Perpendicularmente aos diâmetros, trace também IQ, *iq*. Agora, faça desaparecer os ângulos DPE, *dpe*; e, como DS e *ds*, ES e *es* são iguais, as linhas PE, PF e *pe, pf*, e as linhas curtas DF, *df* podem ser tomadas como iguais, porque sua razão final, quando o ângulo DPE, *dpe* desaparecem juntos, será a razão de igualdade. Sendo assim, segue que

$$PI : PF = RI : DF$$

e $pf : pi = df$ ou $DF : ri$.

Multiplicando termos correspondentes,

$PI.pf : PF.pi = RI : ri$ = arco IH : arco ih (pelo Corolário III, Lema VII)

Novamente, $PI : PS = IQ : SE$

e $ps : pi = se$ ou $SE : iq$.

Assim, $PI.ps : PS.pi = IQ : iq$.

Multiplicando conjuntamente os termos correspondentes dessa proporção e da anterior, derivada de maneira semelhante,

$$PI^2.pf.ps : pi^2.PF.PS = HI.IQ : ih.iq,$$

isto é, como a superfície circular que é descrita pelo arco IH, à medida que o semicírculo AKB gira em torno do diâmetro AB, está para a superfície circular descrita pelo arco *ih*, à medida que o semicírculo *akb* gira em torno do diâmetro *ab*. E as forças com as quais essas superfícies atraem P e *p*, na direção de linhas que tendem para essas superfícies, são diretamente proporcionais, pela hipótese, às superfícies propriamente ditas, e inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias das superfícies a partir desses corpúsculos; isto é, como $pf.ps$ para $PF.PS$. E essas forças novamente estão para as suas partes oblíquas que (pela decomposição de forças, Corolário II das Leis) tendem para os centros das direções das linhas PS, *ps*, como PI para PQ, e *pi* para *pq*; isto é (devido aos triângulos semelhantes PIQ e PSF, *piq* e *psf*), como PS para PF e *ps* para *pf*. Assim, a atração do corpúsculo P em direção a S está para a atração do corpúsculo *p* em direção a *s* como $\frac{PF.pf.ps}{PS}$ está para $\frac{pf.PF.PS}{ps}$ isto é, como ps^2 para PS^2.

E, pelo mesmo raciocínio, as forças com as quais as superfícies descritas pela revolução dos arcos KL, *kl*, atraem esses corpúsculos, estarão como ps^2 para PS^2. E na mesma razão estarão as forças de todas as superfícies circulares, nas quais cada uma das superfícies esféricas pode ser dividida, sendo *sd* sempre igual a SD e *se* igual a SE. E, portanto, por composição, as forças que as superfícies esféricas inteiras exercem sobre esses corpúsculos, estarão na mesma razão. Q.E.D.

Proposição LXXII. Teorema XXXII

Se, para os vários pontos de uma esfera tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem como o quadrado da distância a partir desses pontos, e forem dadas a densidade da esfera e a razão do diâmetro da esfera para a distância

do corpúsculo a partir de seu centro; afirmo que a força com a qual o corpúsculo é atraído será proporcional ao semidiâmetro da esfera.

Pois considere que dois corpúsculos sejam separadamente atraídos por duas esferas, um por uma, o outro pela outra, e que suas distâncias a partir dos centros das esferas sejam proporcionais aos diâmetros das esferas, respectivamente; e que as esferas sejam decompostas em partículas semelhantes, dispostas em uma situação semelhante a dos corpúsculos. Então, as atrações de um corpúsculo em direção às várias partículas de uma esfera estarão para as atrações do outro em direção a um número igual de partículas análogas da outra esfera, em uma razão composta da razão das partículas diretamente, e do quadrado das distâncias inversamente. Mas as partículas são como as esferas, isto é, como os cubos dos diâmetros, e as distâncias são como os diâmetros; e a primeira razão diretamente com a última razão tomada duas vezes inversamente, torna-se a razão de diâmetro para diâmetro. Q.E.D.

Corolário I – Assim, se corpúsculos girarem em círculos em torno de esferas compostas de matéria igualmente atraente, e as distâncias a partir do centro das esferas forem proporcionais a seus diâmetros, os tempos periódicos serão iguais.

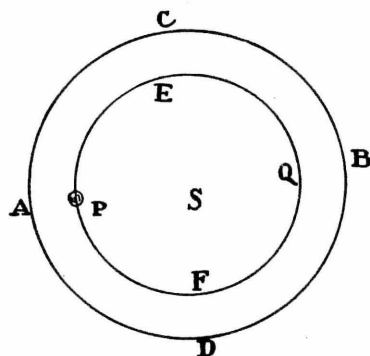
Corolário II – E, vice-versa, se os tempos periódicos forem iguais, as distâncias serão proporcionais aos diâmetros. Esses dois Corolários são conseqüência do Corolário III, Proposição IV.

Corolário III – Se, para os vários pontos de dois sólidos quaisquer, com formas e densidades iguais, tenderem forças centrípetas iguais, que decrescem como o quadrado das distâncias a partir desses pontos, as forças, com as quais corpúsculos localizados em uma situação idêntica com respeito àqueles dois sólidos serão por eles atraídos, estarão uma para a outra como os diâmetros dos sólidos.

Proposição LXXIII. Teorema XXXIII

Se para os vários pontos de uma esfera dada tenderem forças centrípetas iguais, que decrescem como o quadrado das distâncias a partir dos pontos, afirmo que um corpúsculo localizado dentro da esfera é atraído por uma força proporcional à sua distância a partir do centro.

Localize o corpúsculo P na esfera ACBD, descrita em torno do centro S; e, em torno deste mesmo centro S, com o intervalo SP, imagine des-

crita uma esfera interior PEQF. É evidente (pela Proposição LXX) que as superfícies esféricas concêntricas, das quais a diferença AEBF das esferas é composta, não tem efeito algum sobre o corpo P, suas atrações sendo destruídas por atrações contrárias. Resta, portanto, apenas a atração da esfera interior PEQF. E (pela Proposição LXXII) essa é como a distância PS. Q.E.D.

Escólio

As superfícies com as quais, aqui, imagino os sólidos sendo formados, não significam superfícies puramente matemáticas, mas orbes tão extremamente finas que sua espessura é como nada; isto é, orbes evanescentes das quais a esfera finalmente consistirá, quando o número de orbes é aumentado e sua espessura diminuída sem fim. De maneira semelhante, os pontos com os quais as linhas, superfícies e sólidos são compostos, devem ser entendidos como partículas iguais, cujo tamanho é perfeitamente desprezível.

Proposição LXXIV. Teorema XXXIV

O mesmo sendo suposto, afirmo que um corpúsculo situado fora da esfera é atraído por uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância a partir do centro.

Pois suponha que a esfera seja dividida em inúmeras superfícies esféricas concêntricas e as atrações do corpúsculo provenientes das várias superfícies serão inversamente proporcionais ao quadrado da distância do corpúsculo ao centro da esfera (pela Proposição LXXI). E, por composição,

a soma daquelas atrações, isto é, a atração do corpúsculo em direção à esfera toda, estará na mesma razão. Q.E.D.

Corolário I – Assim, as atrações de esferas homogênea a distâncias iguais a partir dos centros serão como as próprias esferas. Pois (pela Proposição LXXII) se as distâncias forem proporcionais aos diâmetros das esferas, as forças serão como os diâmetros. Diminua a maior distância naquela razão; como as distâncias agora são iguais, a atração será aumentada como o quadrado daquela razão; e, portanto, estará para a outra atração como o cubo daquela razão; isto é, na razão das esferas.

Corolário II – Se um corpúsculo colocado fora de uma esfera homogênea for atraído por uma força inversamente proporcional ao quadrado da sua distância a partir do centro, e a esfera consistir de partículas atrativas, a força de qualquer partícula decrescerá como o quadrado da distância a partir de cada partícula.

Corolário III – Se um corpúsculo localizado fora de uma esfera homogênea é atraído por uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao centro, e a esfera consistir de partículas atrativas, a força de cada partícula decrescerá como o quadrado da distância de cada partícula.

Proposição LXXV. Teorema XXXV

Se para os vários pontos de uma dada esfera tenderem forças centrípetas iguais, que decrescem como o quadrado das distâncias a partir do ponto, afirmo que outra esfera semelhante será atraída por ela com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros[1].

Pois a atração de qualquer partícula varia inversamente como o quadrado da sua distância a partir do centro da esfera atrativa (pela Proposição LXXIV), e é, portanto, a mesma como se toda aquela força atrativa emanasse de um único corpúsculo localizado no centro desta esfera. Esta atração é tão grande quanto seria a atração do mesmo corpúsculo, se ele mesmo fosse atraído pelas várias partículas da esfera com a mesma força com a qual elas são atraídas por ele. Mas essa atração do corpúsculo seria (pela Proposição LXXIV) inversamente proporcional ao quadrado de sua distância a partir do centro da esfera; portanto, a atração das esferas está também na mesma razão. Q.E.D.

1. Ver nota 25 do Apêndice.

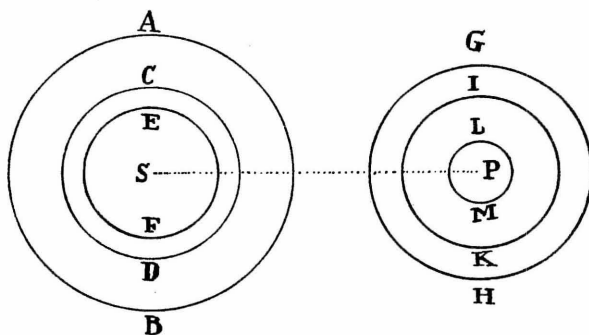
COROLÁRIO I – As atrações de esferas na direção de outras esferas homogêneas são como as esferas atrativas aplicadas aos quadrados das distâncias de seus centros aos centros daquelas que elas atraem.

COROLÁRIO II – O caso é o mesmo quando a esfera atraída também atrai. Porque os vários pontos de uma atraem os vários pontos da outra com a mesma força com a qual eles mesmos são atraídos pelos outros; e, portanto, como em todas as atrações (pela Lei III) os pontos atraídos e atrativos são igualmente influenciados uns pelos outros, a força será duplicada pelas suas atrações mútuas, as proporções permanecendo as mesmas.

COROLÁRIO III – Aquelas várias verdades demonstradas acima, referentes ao movimento de corpos em torno do foco das seções cônicas, ocorrerão quando uma esfera atrativa for colocada no foco e os corpos moverem-se fora da esfera.

COROLÁRIO IV – Aquilo tudo que foi demonstrado anteriormente sobre o movimento de corpos em torno do centro das seções cônicas, ocorre quando os movimentos realizarem-se dentro da esfera.

PROPOSIÇÃO LXXVI. TEOREMA XXXVI

Contudo, se as esferas forem dessemelhantes (quanto a densidade de matéria e a força atrativa) na mesma razão progressivamente a partir do centro até a circunferência; mas semelhantes em toda distância do centro e em todos os lugares ao redor; e a força atrativa de cada ponto diminuir como o quadrado da distância do corpo atraído; afirmo que a força total com a qual uma dessas esferas atrai a outra será inversamente proporcional ao quadrado da distância dos centros.

Imagine que várias esferas semelhantes concêntricas AB, CD, EF etc., a mais interna das quais adicionada à mais externa componha uma matéria

mais densa em direção ao centro, ou subtraída dela, deixe a mesma mais frágil e rarefeita. Então, pela Proposição LXXV, estas esferas atrairão outras esferas concêntricas semelhantes GH, IK, LM etc., umas às outras, com forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância SP. E, por soma e subtração, a soma de todas aquelas forças ou excesso de qualquer delas sobre as outras; isto é, a força total com a qual a esfera AB (composta de quaisquer das esferas concêntricas ou de suas diferenças) atrairá a esfera inteira GH (composta de quaisquer esferas concêntricas ou de suas diferenças) na mesma razão. Faça o número das esferas concêntricas ser aumentado *in infinitum*, de maneira que a densidade da matéria juntamente com a força atrativa possa, ao se ir da circunferência até o centro, aumentar ou diminuir de acordo com qualquer lei dada; e pela adição de matéria não atrativa, pode-se suprir a densidade deficiente, tal que as esferas possam adquirir qualquer forma desejada; e a força com a qual uma dessas atrai a outra estará ainda, pelo raciocínio anterior, na mesma razão inversa do quadrado da distância. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se muitas esferas deste tipo, semelhantes em todos os aspectos, atraem-se mutuamente, as atrações acelerativas de qualquer uma com relação às outras, a quaisquer distâncias iguais dos centros, serão como as esferas atrativas.

COROLÁRIO II – E, a quaisquer distâncias desiguais, serão como as esferas atrativas divididas pelos quadrados das distâncias entre os centros.

COROLÁRIO III – As atrações motoras, ou os pesos das esferas uma em direção à outra, a iguais distâncias dos centros, serão conjuntamente como as esferas atrativas e atraídas; isto é, como os produtos resultantes da multiplicação das esferas uma pela outra.

COROLÁRIO IV – E, a distâncias desiguais, serão diretamente como aqueles produtos e inversamente como o quadrado das distâncias entre os centros.

COROLÁRIO V – Estas proporções também são verdadeiras quando a atração resulta da força atrativa de ambas as esferas entre si. Porque a atração é apenas duplicada pela conjunção das forças, as proporções permanecendo como antes.

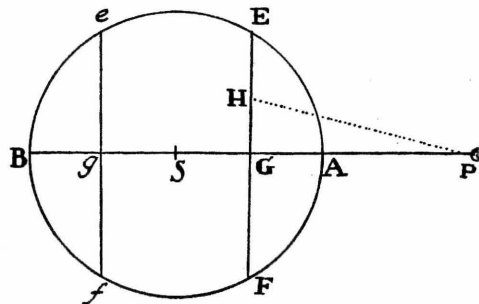
COROLÁRIO VI – Se esferas deste tipo giram em torno de outras em repouso, uma em torno da outra, e as distâncias entre os centros dos corpos quiescentes e girantes são proporcionais aos diâmetros dos corpos quiescentes, os tempos periódicos serão iguais.

COROLÁRIO VII – E, novamente, se os tempos periódicos são iguais, as distâncias serão proporcionais aos diâmetros.

COROLÁRIO VIII – Todas aquelas verdades demonstradas acima, relacionando os movimentos de corpos em torno dos focos de seções cônicas, ocorrerão quando uma esfera atrativa, de qualquer forma e condição, como aquelas descritas acima, for colocada no foco.

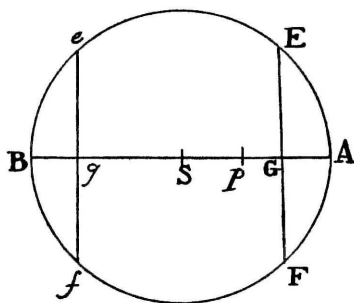
COROLÁRIO IX – E, igualmente, quando os corpos girantes são também esferas atrativas de qualquer condição, como aquelas acima descritas.

PROPOSIÇÃO LXXVII. TEOREMA XXXVII

Se, para vários pontos de esferas tenderem forças centrípetas proporcionais às distâncias dos pontos a partir dos corpos atraídos, afirmo que a força composta com a qual duas esferas atraem-se é como a distância entre os centros das esferas.

CASO 1 – Seja AEBF uma esfera, S seu centro, P um corpúsculo atraído, PASB o eixo da esfera passando através do centro do corpúsculo; EF, *ef*, dois planos cortando a esfera, perpendiculares ao eixo, e eqüidistantes, um de um lado e o segundo do outro em relação ao centro da esfera; G e *g* as intersecções dos planos com o eixo; e H qualquer ponto no plano EF. A força centrípeta do ponto H sobre o corpúsculo na direção da linha PH, é como a distância PH; e (pelo Corolário II das Leis) a mesma força exercida na direção da linha PG, ou em direção ao centro S, é como o comprimento PG. Portanto, a força de todos os pontos no plano EF (isto é, de todo aquele plano) pela qual o corpúsculo P é atraído em direção ao centro S é como a distância PG multiplicada pelo número daqueles pontos, isto é, como o sólido formado por aquele plano EF e a distância PG. E, de maneira semelhante, a força do plano *ef*, pela qual o corpúsculo P é atraído em direção ao centro S, é como aquele plano multiplicado pela sua distância P*g*, ou como o plano igual EF multiplicado por aquela distância P*g*; e a soma das forças de ambos os planos

é como o plano EF multiplicado pela soma das distâncias PG + P*g*, isto é, como aquele plano multiplicado por duas vezes a distância PS do centro ao corpúsculo; isto é, como duas vezes o plano EF multiplicado pela distância PS, ou como a soma dos planos iguais EF + *ef* multiplicada pela mesma distância. E, por um raciocínio semelhante, as forças de todos os planos na esfera toda, eqüidistante em cada lado a partir do centro da esfera, como a soma daqueles planos multiplicados pela distância PS, isto é, como a esfera toda e a distância PS conjuntamente. Q.E.D.

CASO 2 – Seja agora a esfera AEBF atraída pelo corpúsculo P. E, pelo mesmo raciocínio, ver-se-á que a força com a qual a esfera é atraída é como a distância PS. Q.E.D.

CASO 3 – Imagine outra esfera composta de inumeráveis corpúsculos P; e porque a força com a qual cada corpúsculo é atraído é como a distância do corpúsculo a partir do centro da primeira esfera, e como a mesma esfera conjuntamente, e é, portanto, a mesma como se toda ela fosse originada de um único corpúsculo situado no centro da esfera, a força total com a qual

todos os corpúsculos na segunda esfera são atraídos, isto é, com a qual toda aquela esfera é atraída, será a mesma, como se aquela esfera fosse atraída por uma força emanada de um único corpúsculo no centro da primeira esfera; e é, portanto, proporcional à distância entre os centros das esferas. Q.E.D.

CASO 4 – Faça as esferas atraírem-se e a força será duplicada, mas a proporção permanecerá. Q.E.D.

CASO 5 – Coloque o corpúsculo *p* dentro da esfera AEBF; e porque a força do plano *ef* sobre o corpúsculo é como o sólido contido entre aquele plano e a distância *pg*; e a força contrária do plano EF é como o sólido contido entre aquele plano e a distância *p*G; a força composta de ambos será como a diferença dos sólidos, isto é, como a soma dos planos iguais multiplicada pela metade da diferença das distâncias; isto é, como aquela soma multiplicada por *p*S, a distância do corpúsculo a partir do centro da esfera.

E, por um raciocínio semelhante, a atração de todos os planos EF, *ef*, através de toda a esfera, isto é, a atração da esfera inteira, é como a soma de todos os planos conjuntamente, ou como toda a esfera, e como *p*S, a distância do corpúsculo a partir do centro da esfera. Q.E.D.

CASO 6 – E se for composta uma nova esfera a partir de inumeráveis corpúsculos, tais como *p*, situada dentro da primeira esfera AEBF, pode ser provado, como antes, que a atração, seja esta de uma única esfera em direção à outra, ou mútua, uma direção à outra, será como a distância *p*S dos centros. Q.E.D.

PROPOSIÇÃO LXXVIII. TEOREMA XXXVIII

Se, entretanto, as esferas forem dessemelhantes e desiguais no progresso do centro para a circunferência, mas semelhantes em todos os lados ao redor, para todas as distâncias dadas a partir do centro; e a força atrativa de cada ponto for como a distância do corpo atraído, afirmo que a força total com a qual duas esferas deste tipo se atraem é proporcional à distância entre os centros das esferas.

Isto é demonstrado a partir da Proposição anterior, da mesma maneira como a Proposição LXXVI foi demonstrada a partir da Proposição LXXV.

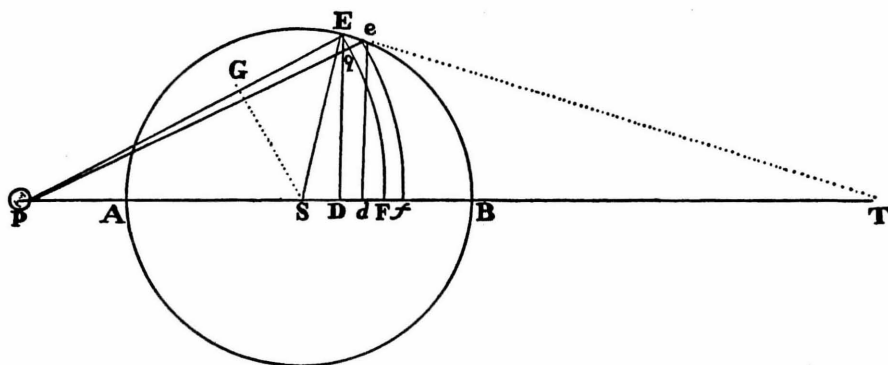
COROLÁRIO – Aquilo que foi acima demonstrado nas Proposições X e LXIV, a respeito do movimento de corpos em torno dos centros de seções cônicas, ocorre quando todas atrações são formadas pela força dos corpos esféricos da condição acima descrita, e os corpos atraídos são esferas do mesmo tipo.

Escólio

Expliquei, assim, os dois casos principais de atrações; isto é, quando as forças centrípetas diminuem como o quadrado da razão das distâncias, ou aumentam na razão simples das distâncias, fazendo com que os corpos, em ambos os casos, girem em seções cônicas e componham corpos esféricos cujas forças centrípetas seguem a mesma lei de aumento e diminuição no recesso a partir do centro, como acontece com as forças das próprias partículas; o que é muito notável. Seria tedioso discorrer sobre outros casos, cujas conclusões são menos elegantes e importantes, tão particularmente como

fiz com estes. Prefiro compreender e determiná-los todos por um método geral, como segue.

LEMA XXIX

Se, em torno do centro S *for descrito qualquer círculo, como* AEB, *e, em torno do centro* P, *também forem descritos dois círculos* EF, ef, *cortando o primeiro em* E *e* e; *e a linha* PS *em* F *e* f; *e, se fizer incidir as perpendiculares* ED, ed *sobre* PS, *afirmo que considerando-se a distância dos arcos* EF, ef *infinitamente diminuída, a razão da linha evanescente* Dd *até a linha evanescente* Ff *será a mesma que aquela da linha* PE *até a linha* PS.

Pois, se a linha P*e* cortar o arco EF em *q;* e a linha reta E*e,* que coincide com o arco evanescente E*e,* for estendida e encontrar a linha reta PS em T; e a perpendicular SG incidir a partir de S sobre PE, então, por causa da igualdade dos triângulos DTE, *d*T*e,* DES,

$$\mathrm{D}d : \mathrm{E}e = \mathrm{DT} : \mathrm{TE} = \mathrm{DE} : \mathrm{ES};$$

e, como os triângulos E*eq,* ESG (pelo Lema VIII e Corolário III, Lema VII), são semelhantes,

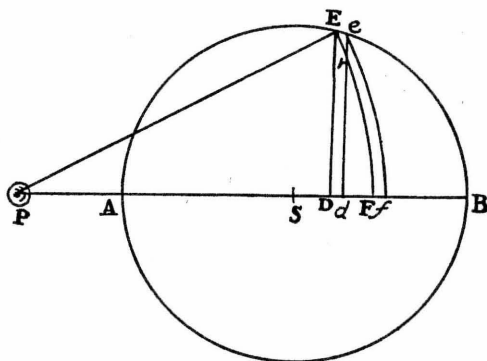
$$\mathrm{E}e : eq \text{ ou } \mathrm{F}f = \mathrm{ES} : \mathrm{SG}.$$

Multiplicando os termos correspondestes das duas proporções,

$$\mathrm{D}d : \mathrm{F}f = \mathrm{DE} : \mathrm{SG} = \mathrm{PE} : \mathrm{PS}$$

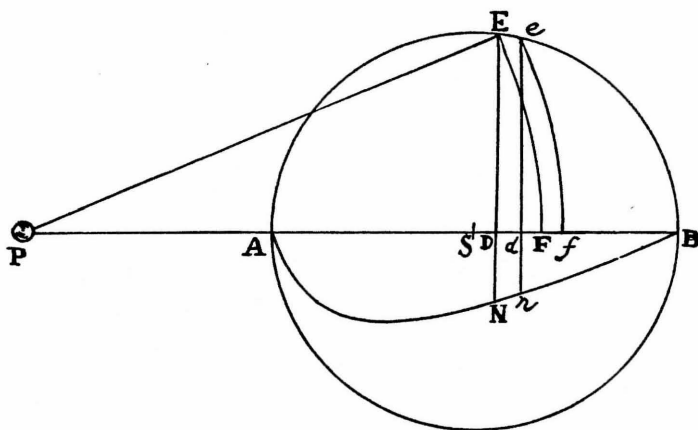
(por causa da semelhança dos triângulos PDE, PGS). Q.E.D.

PROPOSIÇÃO LXXIX. TEOREMA XXXIX

Suponha que uma superfície como EFfe *tenha sua largura infinitamente diminuída e esteja desaparecendo; e que a mesma superfície, em sua revolução em torno do eixo* PS, *descreva um sólido esférico côncavo-convexo, para as várias partículas iguais das quais tendem forças centrípetas iguais; afirmo que a força com a qual esse sólido atrai um corpúsculo situado em* P *está em uma razão composta da razão do sólido* $DE^2.Ff$ *e da razão da força com a qual a partícula dada no lugar* Ff *atrairia o mesmo corpúsculo.*

Pois, se considerarmos, primeiro, a força da superfície FE, gerada pela revolução do arco FE, cortada em qualquer lugar, como em *r*, pela linha *de*, a parte da superfície gerada pela revolução do arco *r*E será como a pequena linha D*d*, o raio da esfera PE permanecendo o mesmo; como *Arquimedes* demonstrou em seu *Tratado sobre a Esfera e o Cilindro.* E a força desta superfície exercida na direção das linhas PE ou P*r*, situadas em torno da superfície cônica, será como esta própria superfície anelar; isto é, como a linha curta D*d*, ou, o que é o mesmo, como o retângulo compreendido entre o raio dado PE da esfera e a pequena linha D*d*; mas aquela força, exercida na direção da linha PS e tendendo para o centro S, será menor na razão de PD para PE e, portanto, será como PD.D*d*. Suponha agora que a linha DF seja dividida em inumeráveis pequenas partículas iguais, cada uma delas chamada D*d*, e, então, a superfície FE será dividida em muitos anéis iguais, cujas forças serão como a soma de todos os retângulos PD.D*d*, isto é, como $\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$ e, portanto, como DE^2. Seja agora a superfície FE multiplicada pela altitude F*f*; e a força do sólido EF*fe*, exercida sobre o corpúsculo P, será como $DE^2.Ff$, isto é, se aquela força que qualquer partícula dada, como F*f*, exerce sobre o corpúsculo P na distância PF, for dada. Mas, se

aquela força não for dada, a força do sólido EF*fe* será como o sólido $DE^2.Ff$ e aquela força não dada. Q.E.D.

Proposição LXXX. Teorema XL

Se, para as várias partes iguais de uma esfera ABE *descrita em torno do centro* S *tenderem forças centrípetas iguais; e, a partir dos vários pontos* D *no eixo* AB *da esfera, na qual um corpúsculo, como* P, *é colocado, forem levantadas as perpendiculares* DE *encontrando a esfera em* E, *e, se naquelas perpendiculares, os comprimentos* DN *forem tomados como a quantidade* $\frac{DE^2.\ PS}{PE}$, *e como a força que uma partícula da esfera situada no eixo exerce, uma partícula da esfera situada no eixo exerce à distância* PE, *sobre o corpúsculo* P, *conjuntamente: afirmo que a força total com a qual o corpúsculo* P *é atraído em direção à esfera é como a área* ANB, *compreendida entre o eixo da esfera* AB *e a linha curva* ANB, *o* locus *do ponto* N.

Pois, supondo verdadeira, a construção do último Lema e Teorema, imagine o eixo AB da esfera sendo dividido em inumeráveis partículas iguais D*d*, e a esfera total dividida em muitas lâminas esféricas côncavo-convexas EF*fe*; e levante a perpendicular *dn*. Pelo último Teorema, a força com a qual as lâminas EF*fe* atraem o corpúsculo P é como $DE^2.Ff$ e a força de uma partícula exercida à distância PE ou PF, conjuntamente. Mas (pelo último Lema) D*d* está para F*f* como PE para PS e, portanto, F*f* é igual a $\frac{PS.Dd}{PE}$; e DE^2 multiplicado por F*f* é igual a $Dd\ .\ \frac{DE^2.PS}{PE}$; e, portanto, a for-

ça da lâmina EF*fe* é como D*d* . $\frac{DE^2.PS}{PE}$ e a força de uma partícula, exercida à distância PF; isto é, pela suposição, como DN.D*d*, ou, como a área evanescente DN*nd*. Portanto, as forças de todas as lâminas exercidas sobre o corpúsculo P são como todas as áreas DN*nd*, isto é, a força total da esfera será como a área total ANB. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se a força centrípeta que tende para as várias partículas permanecer sempre a mesma em todas as distâncias, e DN tomado como $\frac{DE^2.PS}{PE}$, a força total com a qual o corpúsculo é atraído pela esfera será como a área ANB.

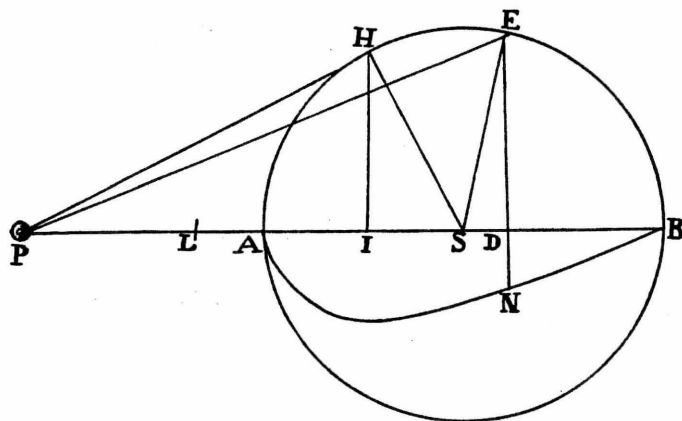
COROLÁRIO II – Se a força centrípeta das partículas for inversamente como a distância do corpúsculo atraído por ela, e DN for tomado como $\frac{DE^2.PS}{PE^2}$, a força com a qual corpúsculo é atraído pela esfera toda será como a área ANB.

COROLÁRIO III – Se a força centrípeta das partículas for inversamente como o cubo da distância do corpúsculo atraído por ela, e DN for tomado como $\frac{DE^2.PS}{PE^4}$, a força com a qual o corpúsculo é atraído pela esfera toda será como a área ANB.

COROLÁRIO IV – E, universalmente, se for suposto que a força centrípeta que tende para as várias partículas da esfera for inversamente como a quantidade V; e DN for tomado como $\frac{DE^2.PS}{PE.V}$; a força com a qual um corpúsculo é atraído pela esfera toda será ANB.

PROPOSIÇÃO LXXXI. PROBLEMA XLI

Tudo permanecendo como acima, pede-se medir a área ANB.

A partir do ponto P, trace a linha reta PH tocando a esfera em H; e sobre o eixo PAB incida a perpendicular HI, e bisseccione PI em L; e (pela Proposição XII, Livro II, *Elementos de Euclides*), PE^2 é igual a $PS^2 + SE^2 + 2PS.SD$. Mas, como os triângulos SPH, SHI são iguais, SE^2 ou SH^2 será igual ao retângulo PS.IS. Portanto, PE^2 é igual ao retângulo contido sob PS e PS + SI + 2SD; isto é, sob PS e 2LS + 2SD; ou seja, sob PS e 2LD. Além disso, DE^2 é igual a $SE^2 - SD^2$, ou

$$SE^2 - LS^2 + 2LS.LD - LD^2,$$

isto é, $2LS.LD - LD^2 - LA.LB$.

Pois, $LS^2 - SE^2$ ou $LS^2 - SA^2$ (pela Proposição VI, Livro II, *Elementos de Euclides*) é igual ao retângulo LA.LB. Portanto, se em vez de DE^2 usarmos:

$$2LS.LD - LD^2 - LA.LB,$$

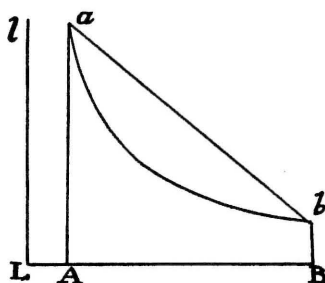
a quantidade $\frac{DE^2.PS}{PE.V}$, que (pelo Corolário IV da Proposição anterior) é como o comprimento da ordenada DN, irá agora decompor-se em três partes

$$\frac{2SLD.PS}{PE.V} - \frac{LD^2.PS}{PE.V} - \frac{ALB.PS}{PE.V};$$

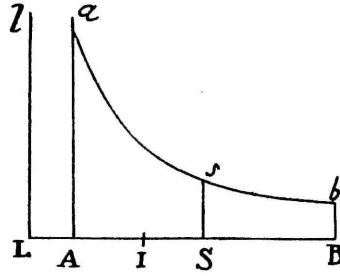
em que, se em vez de V, usarmos a razão inversa da força centrípeta, e em vez de PE a média proporcional entre PS e 2LD, aquelas três partes tornar-se-ão ordenadas para tantas linhas curvas, cujas áreas são encontradas pelos métodos comuns. Q.E.D.

EXEMPLO 1 – Se a força centrípeta que tende para as várias partículas da esfera for inversamente como a distância; em vez de V use PE para a distância, e 2PS.LD para PE^2; e DN tornar-se-á como $SL - \frac{1}{2} LD - \frac{LA.LB}{2LD}$.

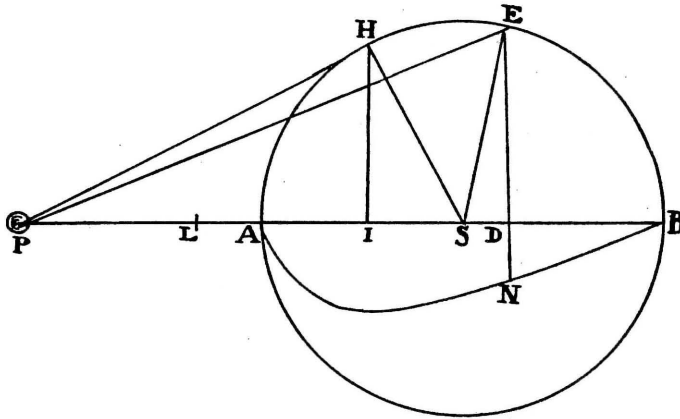
Suponha DN igual ao seu dobro $2SL - LD - \frac{LA.LB}{LD}$; e 2SL, a parte dada da ordenada traçada no comprimento AB, descreverá a área retangular 2SL.AB; e a parte indefinida LD, traçada perpendicularmente no mesmo comprimento com um movimento contínuo, de tal forma que no seu movimento em uma direção ou em outra, quer por acréscimo ou decréscimo, permanece sempre igual ao comprimento LD, descreverá a área $\frac{LB^2-LA^2}{2}$,

isto é, a área SL.AB; que, retirada da área anterior 2SL.AB, resultará na área SL.AB. Mas, a terceira parte $\frac{LA.LB}{LD}$, traçada da mesma maneira com um movimento contínuo perpendicular ao mesmo comprimento, descreverá a área de uma hipérbole, que subtraída da área SL.AB resultará em ANB, a área procurada. Daí resulta esta construção do Problema. Nos pontos, L, A, B, levante as perpendiculares L*l*, A*a*, B*b*; tomando A*a* igual a LB e B*b* igual a LA. Tomando L*l* e LB como assíntotas, descreva através dos pontos *a, b* a curva hiperbólica *ab*. E a corda *ba* sendo traçada, incluirá a área *aba* igual à área procurada ANB.

EXEMPLO 2 – Se a força centrípeta que tende para as várias partículas da esfera for inversamente como o cubo da distância, ou (o que é a mesma coisa) como aquele cubo aplicado a qualquer plano dado, use $\frac{PE^3}{2AS^2}$ para V, e 2PS.LD para PE^2; e DN tornar-se-á como $\frac{SL.AS^2}{PS.LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{LA.LB.AS^2}{2PS.LD^2}$, isto é, (porque PS, AS, SI são continuamente proporcionais), como

$$\frac{LSI}{LD} - \tfrac{1}{2}SI - \frac{LA.LB.SI}{2LD^2}.$$

Se traçarmos, então, estas três partes no comprimento AB, a primeira, $\frac{SL.SI}{LD}$, gerará a área de uma hipérbole; a segunda, ½ SI, a área ½ AB.SI; a terceira, $\frac{LA.LB.SI}{2LD^2}$, a área $\frac{LA.LB.SI}{2LA} - \frac{LA.LB.SI}{2LB}$ isto é, ½ AB.SI. Da primeira, subtraia a soma da segunda e da terceira, e restará ANB, a área procurada.

Daí resulta esta construção do Problema. Nos pontos L, A, S, B, levante as perpendiculares L*l*, A*a*, S*s*, B*b*, das quais suponha S*s* igual a SI; e através do ponto *s*, em direção às assíntotas L*l*, LB, descreva a hipérbole *asb* encontrando as perpendiculares A*a*, B*b* em *a* e *b*; e o retângulo 2SA.SI, subtraído da área hiperbólica A*asb*B, deixará ANB, a área procurada.

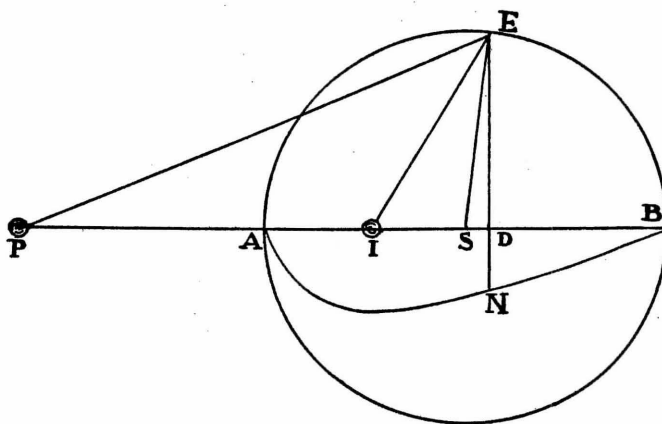
EXEMPLO 3 – Se a força centrípeta que tende para as várias partículas das esferas diminui como a quarta potência da distância a partir das partículas, use $\frac{PE^4}{2AS^3}$ em lugar de V, $\sqrt{(2PS+LD)}$ em lugar de PE, e DN tornar-se-á

como $\frac{SI^2.SL}{\sqrt{2SI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2.LA.LB}{2\sqrt{2SI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LD^5}}$.

Estas três partes traçadas no comprimento AB produzem muitas áreas, a saber, $\frac{2SI^2.SL}{\sqrt{2SI}}$ em $\left(\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}\right)$; $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$ em $\sqrt{(LB - \sqrt{LA})}$; e $\frac{SI^2.LA.LB}{3\sqrt{2SI}}$ em $\left(\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}\right)$. E estas, após a devida redução, serão $\frac{2SI^2.SL}{LI}$, SI^2, e SI^2

$+ \frac{2SI^3}{3LI}$. Subtraindo-se a última da primeira obtém-se $\frac{4SI^3}{3LI}$. Portanto, a força total com a qual o corpúsculo P é atraído em direção ao centro da esfera é como $\frac{SI^3}{PI}$, isto é, inversamente como $PS^3.PI$. Q.E.I.

Pelo mesmo método pode-se determinar a atração de um corpúsculo situado dentro da esfera, porém, mais rapidamente, pelo Teorema seguinte.

Proposição LXXXII. Teorema XLI

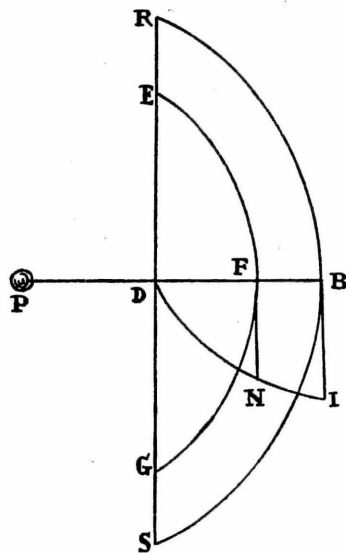
Em uma esfera descrita em torno do centro S *com raio* SA, *se forem tomados* SI, SA, SP *como continuamente proporcionais: afirmo que a atração de um corpúsculo dentro da esfera, em qualquer lugar* I, *está para sua atração fora da esfera, no lugar* P, *em uma razão de* IS, PS *– as distâncias a partir do centro – e a raiz quadrada da razão das forças centrípetas que tendem para o centro, naqueles lugares* P *e* I.

Assim, se as forças centrípetas das partículas da esfera forem inversamente como a distância dos corpúsculos atraído por elas, a força com a qual o corpúsculo situado em I é atraído pela esfera toda estará para a força com a qual é ele atraído em P em uma razão composta da raiz quadrada da razão da distância SP, e da raiz quadrada da razão da força centrípeta no lugar I, originando-se de qualquer partícula no centro para a força centrípeta no lugar P, originando-se da mesma partícula no centro; isto é, inversamente como a raiz das distâncias SI, SP, uma para a outra. Estas duas raízes quadra-

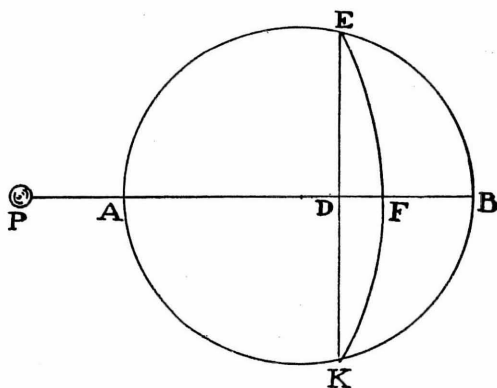
das de razões compõem a razão de igualdade e, portanto, as atrações e I e O, produzidas por toda a esfera, são iguais. Por cálculos semelhantes, se as forças das partículas da esfera forem inversamente como o quadrado da razão das distâncias, encontraremos que a atração em I está para a atração em P como a distância SP para o semidiâmetro Sa da esfera. Se aquelas forças forem inversamente como o cubo da razão das distâncias, as atrações em I e P estarão uma para a outra como SP^2 para SA^2; se formem inversamente como a quarta potência da razão, como SP^3 para SA^3. Portanto, sendo a atração em P, encontrada no último caso, inversamente como $PS^3.PI$, a atração em I será inversamente como $SA^3.PI$, isto é, como SA^3 é dada, inversamente com PI. E a progressão é a mesma *in infinitum*. A demonstração deste Teorema é como segue:

Permanecendo tudo como nas construções acima, e um corpúsculo estando em qualquer lugar P, a ordenada DN foi encontrada como sendo proporcional a $\frac{DE^2.PS}{PE.V}$. Portanto, se IE for traçada, aquela ordenada para qualquer outro lugar do corpúsculo, como I, tornar-se á (o resto permanecendo igual) como $\frac{DE^2.IS}{IE.V}$. Imagine as forças centrípetas fluindo a partir de um ponto qualquer da esfera, como E, uma para a outra nas distâncias IE e PE como PE^n para IE^n (onde o número n representa o índice das potências de PE e IE), e aquelas ordenadas tornar-se-ão como $\frac{DE^2.PS}{PE.PE^n}$ e $\frac{DE^2.IS}{IE.IE^n}$, cuja razão uma para a outra é como $PS.IE.IE^n$ para $IS.PE.PE^n$. Como SI, SE, SP estão em proporção contínua, os triângulos SPE, SEI são semelhantes; e, portanto, IE está para PE como IS para SE ou SA. Substitua a razão de IE para PE pela razão de IS para SA; e a razão das ordenadas torna-se a de $PS.IE^n$ para $SA.PE^n$. Mas a razão de PS para SA é a raiz quadrada daquela das distâncias PS, SI; e a razão de IE^n para PE^n (porque IE está para PE como IS para SA) é a raiz daquela das forças nas distâncias PS, IS. Portanto, as ordenadas e, conseqüentemente, as áreas que as ordenadas descrevem, e as atrações proporcionais a elas, estão em uma razão composta da raiz quadrada daquelas razões. E.E.D.

Proposição LXXXIII. Problema XLII

Encontrar a força com a qual um corpúsculo localizado no centro de uma esfera é atraído na direção de um segmento qualquer daquela esfera.

Seja P um corpo no centro daquela esfera e RBSD um segmento desta, contido entre o plano RDS e a superfície esférica RBS. Corte DB em F por uma superfície esférica EFG, descrita a partir do centro P, e divida o segmento nas partes BREFGS, FEDG. Imaginemos esse segmento não como uma superfície puramente matemática, mas física, tendo alguma espessura, porém perfeitamente desprezível. Chamemos essa espessura de O, e (pelo que *Arquimedes* demonstrou) tal superfície será como PF.DF.O. Imaginemos, além disso, as forças atrativas das partículas da esfera variando inversamente com aquela potência das distâncias, das quais n é índice; e a força com a qual a superfície EFG atrai o corpo P será (pela Proposição LXXIX) como $\frac{DE^2.O}{PF^n}$, isto é, como $\frac{2DF.O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2.O}{PF^n}$. Faça a perpendicular FN multiplicada por O proporcional a esta quantidade; e a área curvilínea BDI, que a ordenada FN, traçada através do comprimento DB, descreverá com um movimento contínuo, será como a força total com a qual o segmento todo RBSD atrai o corpo P. Q.E.I.

Proposição LXXXIV. Problema XLIII

Encontrar a força com a qual um corpúsculo localizado fora do centro de uma esfera, no eixo de qualquer segmento, é atraído por aquele segmento.

Seja o corpo P, localizado no eixo ADB do segmento EBK, atraído por este segmento. Em torno do centro P, com o raio PE, descreva a superfície esférica EFK; e faça-a dividir o segmento em duas partes EBKFE e EFKDE. Encontre a força da primeira daquelas partes pela Proposição LXXXI, e a força da última parte pela Proposição LXXXIII, e a soma das forças será a força de todo o segmento EBKDE. Q.E.I.

Escólio

Uma vez explicadas as atrações de corpos esféricos, passaremos agora, na ordem, a tratar das leis da atração em outros corpos formados igualmente por partículas atrativas; mas não tenho intenção de tratá-los em particular. Será suficiente acrescentar algumas Proposições gerais relacionadas às forças de tais corpos, e os movimentos daí resultantes, porque o conhecimento daquelas será de pouca utilidade em investigações filosóficas.

» SEÇÃO XIII

As forças atrativas de corpos que não são esféricos

PROPOSIÇÃO LXXXV. TEOREMA XLII

Se um corpo for atraído por um outro, e sua atração for muito mais forte quando ele estiver contíguo ao corpo atrativo do que quando separado do outro por um intervalo muito pequeno; as forças das partículas do corpo atrativo decrescem, no recuo do corpo atraído, numa razão maior do que a do quadrado da distância das partículas.

Pois, se as forças decrescerem como o quadrado das distâncias entre as partículas, a atração em direção ao corpo esférico sendo (pela Proposição LXXIV) inversamente como o quadrado da distância do corpo atraído a partir do centro da esfera, não aumentaria sensivelmente com o contato, e este aumento seria menor ainda se a atração, no recuo do corpo atraído, decrescesse uma proporção ainda menor. Evidentemente, portanto, a Proposição refere-se a esferas atrativas. E o caso é o mesmo para globos esféricos côncavos atraindo corpos externos. E isto é ainda mais evidente em globos que atraem corpos colocados dentro deles, porque aí as atrações difundidas através das cavidades daqueles globos são (pela Proposição LXX) canceladas pelas atrações contrárias e, portanto, não têm nenhum efeito, mesmo no lu-

gar de contato. Agora, se dessas esferas e globos esféricos retiramos quaisquer partes distantes do lugar de contato, e adicionarmos arbitrariamente novas partes em qualquer lugar, poderemos mudar as formas dos corpos atrativos aleatoriamente; mas estando as partes adicionadas, ou retiradas, distantes do lugar de contato, não causarão um excesso considerável da atração originária do contato dos dois corpos. Portanto, a Proposição é válida para corpos de qualquer forma. Q.E.D.

Proposição LXXXVI. Teorema XLIII

Se as forças das partículas, das quais um corpo atrativo é composto, decrescem no recuo do corpo atrativo como a terceira potência, ou em uma potência superior da distância, a partir das partículas, a atração será muito mais forte no ponto de contato do que quando os corpos atraído e atrativo estiverem separados um do outro, ainda que por um intervalo muito pequeno.

Que a atração é infinitamente aumentada quando o corpúsculo atraído vem a tocar uma esfera atrativa deste tipo, é demonstrado pela solução do Problema XLI, apresentada nos segundo e terceiro Exemplos. O mesmo também ocorrerá (comparando-se os Exemplos e o Teorema XLI) com atrações de corpos exercidas na direção de globos côncavo-convexos, quer os corpos atraídos estejam colocados fora dos globos, ou nas cavidades dentro deles. E, adicionando-se ou retirando-se dessas esferas e globos qualquer matéria atrativa de qualquer lugar, que não o de contato, de maneira que os corpos atrativos possam assumir qualquer forma, a Proposição será válida universalmente para todos os corpos. Q.E.D.

Proposição LXXXVII. Teorema XLIV

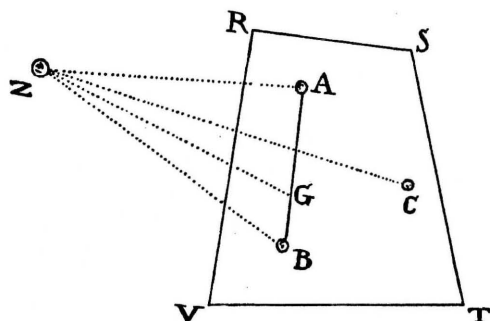
Se dois corpos semelhantes um ao outro, e constituídos de matéria igualmente atrativa, atraem separadamente dois corpúsculos proporcionais a esses corpos, e numa situação semelhante a eles, as atrações acelerativas dos corpúsculos em direção aos corpos inteiros serão como as atrações acelerativas dos corpúsculos em direção às partículas dos corpos proporcionais aos todos e semelhantemente situados dentro deles.

Pois, se os corpos forem divididos em partículas proporcionais aos todos, e neles igualmente situadas, da mesma forma como está a atração em direção a qualquer partícula de um dos corpos para a atração em direção à partícula correspondente no outro corpo, e, por composição, assim estará a atração em direção ao primeiro corpo inteiro para a atração ao segundo corpo inteiro. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Se, portanto, à medida que as distâncias dos corpúsculos atraídos crescerem, as forças atrativas das partículas decrescerem na razão de qualquer potência das distâncias, as atrações acelerativas em direção aos corpos inteiros serão diretamente como os corpos e inversamente como aquelas potências das distâncias. Como, quando as forças das partículas decrescerem como o quadrado das distâncias a partir dos corpúsculos atraídos, e os corpos forem como A^3 e B^3, e, portanto, tanto os lados cúbicos dos corpos como a distância dos corpúsculos atraídos a partir dos corpos serão como A e B, as atrações acelerativas em direção aos corpos serão como $\frac{A^3}{A^2}$ e $\frac{B^3}{B^2}$, isto é, como A e B, os lados cúbicos desses corpos. Se as forças das partículas decrescerem como o cubo das distâncias a partir dos corpúsculos atraídos, as atrações acelerativas em direção aos corpos inteiros serão como $\frac{A^3}{A^3}$, e $\frac{B^3}{B^3}$, isto é, iguais. Se as forças decrescerem como a quarta potência, as atrações em direção aos corpos serão como $\frac{A^3}{A^4}$ e $\frac{B^3}{B^4}$, isto é, inversamente como os lados cúbicos A e B. E assim em outros casos.

COROLÁRIO II – Conseqüentemente, por outro lado, a partir das forças com as quais corpos igualmente atraem corpúsculos semelhantes situados, pode-se obter a razão do decréscimo das forças atrativas das partículas à medida que o corpúsculo atraído distancia-se delas, apenas se este decréscimo está em qualquer razão, direta ou inversa, das distâncias.

PROPOSIÇÃO LXXXVIII. TEOREMA XLV

Se as forças atrativas das partículas iguais de qualquer corpo forem como a distância dos lugares a partir das partículas, a força do corpo inteiro tenderá para o seu centro de gravidade; e será a mesma que a força de um globo consistindo de matéria semelhante e igual, e tendo seu centro no centro de gravidade.

Faça as partículas A, B do corpo RSTV atraírem qualquer corpúsculo Z com forças que, supondo serem as partículas iguais entre si, são como as distâncias AZ, BZ; mas, se as supusermos desiguais, as forças serão como aquelas partículas e suas distâncias AZ, BZ, conjuntamente, ou (se assim posso dizer) como aquelas partículas multiplicadas pelas suas distâncias AZ, BZ, respectivamente. E faça aquelas forças serem expressas por seus conteúdos A.AZ e B.BZ. Una AB e faça-o ser interceptado em G, de forma que AG esteja para BG como a partícula B para a partícula A; e G será o centro comum de gravidade das partículas A e B. A força A.AZ (pelo Corolário II das Leis) será decomposta nas forças A.GZ e A.AG; e a força B.BZ nas forças B.GZ e B.BG. Agora, as forças A.AG e B.BG, como A é proporcional a B, e BG a AG, são iguais, e, portanto, tendo direções contrárias, cancelam-se. Restam, então, as forças A.GZ e B.GZ. Estas tendem de Z para o centro G e compõem a força (A + B).GZ; isto é, a mesma força como se as partículas atrativas A e B estivessem localizadas no seu centro comum de gravidade G, lá formando um pequeno globo.

Pelo mesmo raciocínio, se for acrescentada uma terceira partícula C, e a sua força for composta com a força (A + B).GZ tendendo para o centro G, a força daí resultante tenderá para o centro comum de gravidade daquele globo em G e da partícula C; isto é, para o centro comum de gravidade das três partículas A, B, C; e será a mesma como se aquele globo e a partícula C fossem colocados naquele centro comum, lá formando um globo maior; e assim podemos prosseguir *in infinitum*. Portanto, a força *total de* todas as partículas de qualquer corpo RSTV é a mesma como se aquele corpo, sem ter seu centro de gravidade removido, tomasse a forma de um globo. Q.E.D.

Corolário – Portanto, o movimento do corpo atraído Z será o mesmo como se o corpo atrativo RSTV fosse esférico; e, portanto, se aquele corpo atrativo estiver ou em repouso ou deslocando-se uniformemente em uma

linha reta, o corpo atraído mover-se-á em uma elipse tendo seu centro no centro de gravidade do corpo atrativo.

PROPOSIÇÃO LXXXIX. TEOREMA XLVI

Se houver diversos corpos consistindo de partículas iguais cujas forças são como as distâncias dos lugares a partir de cada uma, a força composta de todas as forças pelas quais qualquer corpúsculo é atraído tenderá para o centro comum de gravidade dos corpos atrativos; e será a mesma como se aqueles corpos atrativos, preservando seu centro comum de gravidade, devessem lá se unir e formar um único globo.

Isto é demonstrado da mesma forma que na Proposição anterior.

COROLÁRIO – Portanto, o movimento do corpo atraído será o mesmo como se os corpos atrativos, preservando seu centro comum de gravidade, lá se unissem, formando um globo. E, portanto, se o centro comum de gravidade dos corpos atrativos estiver ou em repouso ou deslocando-se uniformemente em uma linha reta, o corpo atraído mover-se-á em uma elipse, tendo seu centro no centro comum de gravidade dos corpos atrativos.

PROPOSIÇÃO XC. PROBLEMA XLIV

Se para os vários pontos de qualquer círculo tenderem forças centrípetas iguais, que aumentam ou diminuem em qualquer razão das distâncias, pede-se encontrar a força com a qual um corpúsculo é atraído, quando situado em qualquer lugar sobre uma linha reta que se encontra em ângulo reto com o plano do círculo no seu centro.

Suponha um círculo descrito em torno do centro A com qualquer raio AD, em um plano ao qual a linha reta AP é perpendicular; e suponha que seja pedido obter a força com a qual um corpúsculo P é atraído ao longo da mesma. De qualquer ponto E do círculo até o corpúsculo atraído P, trace a linha reta PE. Na linha reta PA, tome PF igual a PE, e faça uma perpendicular FK, erguida em F, ser como a força com a qual o ponto E atrai o corpúsculo P. Faça a linha curva IKL ser o *locus* do ponto K. Faça aquela curva encontrar o plano do círculo em L. Em PA, tome PH igual a PD e levante a perpendicular HI, encontrando aquela curva em I; e a atração do

corpúsculo P em direção ao círculo será como a área AHIL multiplicada pela altitude AP. Q.E.I.

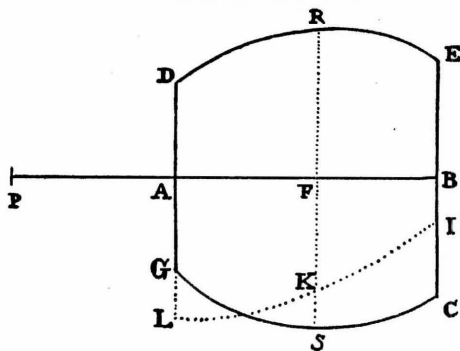
Pois tome em AE uma linha muito pequena E*e*. Una P*e*, e, em PE, PA tome PC, P*f* iguais a P*e*. E como a força com a qual qualquer ponto E do anel descrito em torno do centro A, com raio AE, no plano anteriormente mencionado, atrai para si o corpo P, é suposta ser como FK; logo, a força com a qual aquele ponto atrai o ponto P em direção a A é como $\frac{AP.FK}{PE}$; e a força com a qual o anel inteiro atrai o corpo P na direção de A é como o anel e $\frac{AP.FK}{PE}$ conjuntamente; e aquele anel é também como o retângulo sob o raio AE e a largura E*e*, e este retângulo (porque PE e AE, E*e* e CE são proporcionais) é igual ao retângulo PE.CE ou PE.F*f*; a força com a qual aquele anel atrai o corpo P na direção de A será como PE.F*f* e $\frac{AP.FK}{PE}$ conjuntamente; isto é, como o conteúdo de F*f*. FK. AP, ou como a área FK*kf* multiplicada por AP. E, portanto, a soma das forças com as quais todos os anéis, no círculo descrito em torno do centro A com raio AD, atraem o corpo P em direção a A, é como toda a área AHIKL multiplicada por AP. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Portanto, se as forças dos pontos decrescerem *como o* quadrado das distâncias, isto é, se FK for como $\frac{1}{PF^2}$, e, portanto, a área AHIKL como $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; a atração do corpúsculo P em direção ao círculo será como $1 - \frac{PA}{PH}$; isto é, como $\frac{AH}{PH}$.

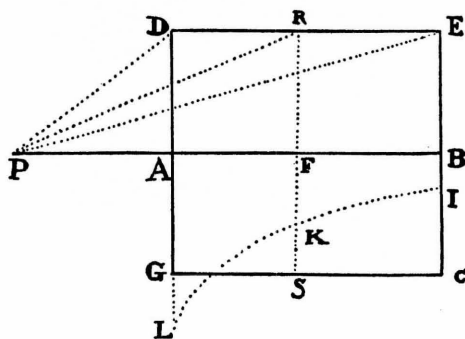
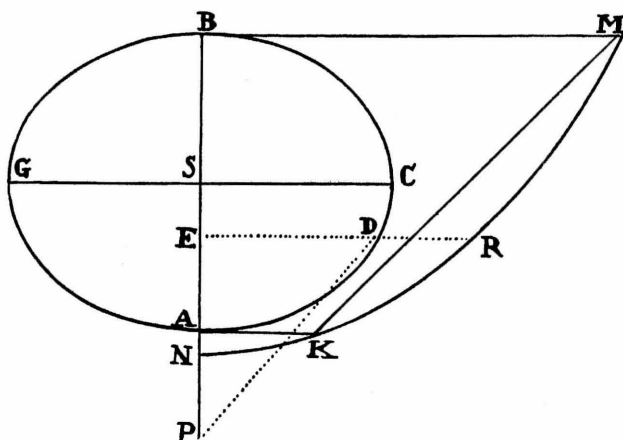
COROLÁRIO II – E, universalmente, se as forças dos pontos das distâncias D forem inversamente como qualquer potência D^n das distâncias; isto é, se FK for como $\frac{1}{D^n}$, e, portanto, a área AHIKL, como $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$, a atração do corpúsculo P em direção ao círculo será como $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

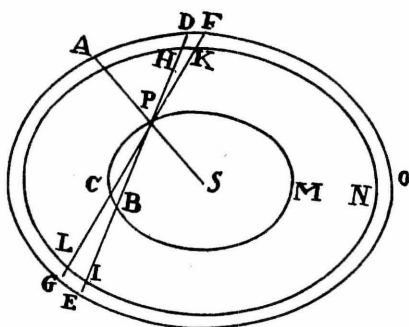
COROLÁRIO III – E, se o diâmetro do círculo for aumentado *in infinitum* e o número n for maior que a unidade; a atração do corpúsculo P em direção ao plano infinito inteiro será inversamente como PA^{n-2}, porque o outro termo $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ anula-se.

PROPOSIÇÃO XCI. PROBLEMA XLV

Obter a atração de um corpúsculo situado no eixo de um sólido redondo, para o qual vários pontos tendem com forças centrípetas iguais que decrescem em qualquer razão das distâncias.

Seja o corpúsculo P, situado no eixo AB do sólido DECG, atraído em direção a este sólido. Faça o sólido ser cortado por um círculo qualquer, como RFS, perpendicular ao eixo; e em seu semidiâmetro FS, em qualquer plano PALKB passando através do eixo, tome (pela Proposição XC) o comprimento FK proporcional à força com a qual o corpúsculo P é atraído em direção àquele círculo. Seja a linha curva LKI o *locus* do ponto K, que encontra os planos dos círculos mais externos AL e BI em L e I; e a atração do corpúsculo P em direção ao sólido será como a área LABI. Q.E.I.

COROLÁRIO I – Portanto, se o sólido for um cilindro descrito pelo paralelogramo ADEB, ao girar em torno do eixo AB, e as forças centrípetas

que tendem para os vários pontos forem inversamente como os quadrados das distâncias a partir dos pontos; a atração do corpúsculo P em direção a esse cilindro será como AB - PE + PD. Pois a ordenada FK (pelo Corolário I, Proposição XC) será como $1 - \frac{PF}{PR}$. A parte 1 dessa quantidade, multiplicada pelo comprimento AB, descreve a área 1.AB; e a outra parte $\frac{PF}{PR}$, multiplicada pelo comprimento PB, descreve a área 1.(PE - AD) (como pode ser facilmente demonstrado a partir da quadratura da curva LKI); e, de forma semelhante, a mesma parte multiplicada pelo comprimento PA descreve a área 1.(PD - AD), e multiplicada por AB, a diferença de PB e PA, descreve 1.(PE - PD), a diferença das áreas. Da primeira, 1. AB, retire a última, 1.(PE - PD), e restará a área LABI, igual a 1.(AB - PE + PD). Portanto, a força, sendo proporcional a esta área, será como AB - PE + PD.

COROLÁRIO II – Portanto, também é conhecida a força com a qual um esferóide AGBC atrai qualquer corpo P situado externamente a seu eixo AB. Seja NKRM uma seção cônica cuja ordenada ER, perpendicular a PE, é sempre igual ao comprimento da linha PD, traçada continuamente para o ponto D, no qual aquela ordenada corta o esferóide. A partir dos vértices A, B do esferóide, levante até seu eixo AB as perpendiculares AK, BM, respectivamente iguais a AP, BP, e, portanto, encontrado a seção cônica em K e M; e uma KM, destacando o segmento KMRK. Seja S o centro do esferóide, e SC seu semidiâmetro maior; a força com a qual o esferóide atrai o corpo P estará para a força com a qual a esfera descrita com o diâmetro AB atrai o mesmo corpo como $\frac{AS.CS^2 - PS.KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ está para $\frac{AS^3}{3PS^2}$. E, por um cálculo fundamentado nos mesmos princípios, pode-se obter as forças dos segmentos do esferóide.

Corolário III – Se o corpúsculo for localizado dentro do esferóide e em seu eixo, a atração será como sua distância a partir do centro. Isto pode ser facilmente inferido do seguinte raciocínio, válido tanto se a partícula estiver no eixo como em qualquer outro diâmetro dado. Seja AGOF um esferóide atrativo, S seu centro e P o corpo atraído. Através do corpo P, trace o semidiâmetro SPA e duas linhas retas DE, FG que encontram o esferóide em D e E, F e G; e sejam PCM, HLN as superfícies de dois esferóides interiores semelhantes e concêntricos ao exterior, o primeiro dos quais passa através do corpo P, e corta as linhas retas DE, FG em B e C; o último corta as mesmas linhas retas em H e I, K e L. Faça todos os esferóides terem um eixo comum, e as partes das linhas retas interceptadas em ambos os lados DP e BE, FP e CG, DH e IE, FK e LG, serão mutuamente iguais; porque as linhas retas DE, PB e HI são bisseccionadas no mesmo ponto, como também o são as linhas retas FG, PC e KL. Imagine agora DPF, EPG representando cones opostos descritos com os ângulos verticais infinitamente pequenos DPF, EPG, e as linhas DH, EI serem também infinitamente pequenas. Então, as partículas dos cones DHKF, GLIE, destacados pelas superfícies esferoidais, em razão da igualdade das linhas DH e EI, estarão umas para as outras como os quadrados das distâncias a partir do corpo P e, portanto, atrairão igualmente aquele corpúsculo. E, por um raciocínio semelhante, se os espaços DPF, EGCB forem divididos em partículas pelas superfícies de inumeráveis esferóides semelhantes, concêntricos ao primeiro e possuindo um eixo comum, todas estas partículas igualmente atrairão, em ambos os lados, o corpo P em direção às partes contrárias. Portanto, as forças do cone DPF, e do segmento cônico EGCB, são iguais e pelas suas ações opostas, cancelam-se. E o caso é o mesmo com as forças de toda a matéria que encontra-se fora do

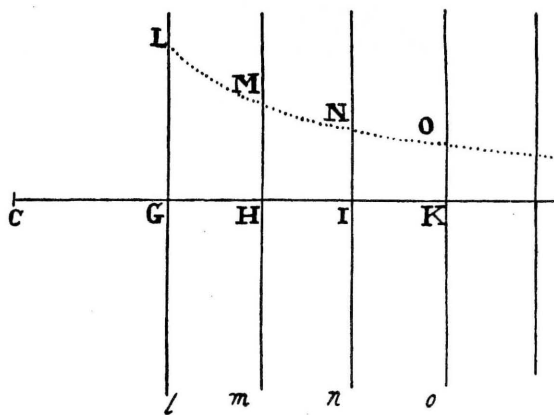
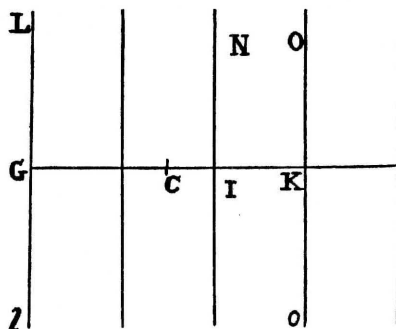
esferóide interior PCBM. Portanto, o corpo P é atraído apenas pelo esferóide interior PCBM, e, assim (pelo Corolário III, Proposição LXXII), sua atração está para a força com a qual o corpo A é atraído pelo esferóide inteiro AGOD como a distância PS está para a distância AS. Q.E.D.

Proposição XCII. Problema XLVI

Sendo dado um corpo atrativo, pede-se encontrar a razão do decréscimo das forças centrípetas que tendem para seus vários pontos.

O corpo dado deve ter a configuração de uma esfera, um cilindro ou alguma figura regular, cuja lei de atração, correspondendo a qualquer razão de decréscimo, possa ser encontrada pelas Proposições LXXX, LXXXI e XCI. Então, através de experimentos, a força e a lei da atração em direção ao todo, conhecida desta maneira, fornecerá a razão do decréscimo das forças das várias partes, o que devia ser encontrado.

Proposição XCIII. Teorema XLVII

Se um sólido for plano em um lado e infinitamente estendido para os outros lados, e consistir de partículas idênticas igualmente atrativas, cujas forças diminuem no recuo a partir do sólido na razão de qualquer potência maior que a do quadrado das distâncias; e um corpúsculo colocado em qualquer dos lados do plano for atraído pela força do sólido inteiro; afirmo que a força atrativa do sólido inteiro, no recuo a partir de sua superfície plana, decrescerá na razão de uma potência cuja base é a distância do corpúsculo a partir do plano e seu índice é o índice da potência das distâncias menos 3.

CASO 1 – Seja LG*l* o plano pelo qual o sólido é delimitado. Faça o sólido estar daquele lado do plano se encontra na direção de I, e decomponha-o em inúmeros planos *m*HM, *n*IN, *o*KO etc., paralelos a GL. E primeiro localize o corpo atraído C fora do sólido. Trace CGHI perpendicularmente àqueles inumeráveis planos, e faça as forças atrativas dos pontos do sólido decrescerem na razão de uma potência das distâncias cujo índice é o numero n não menor que 3. Portanto (pelo Corolário III, Proposição XC), a força com a qual qualquer plano *m*HM atrai o ponto C é inversamente como CH^{n-2}. No plano *m*HM, tome o comprimento HM inversamente proporcional a CH^{n-2}, e aquela força será como HM. De forma semelhante, nos vários planos *l*GL, *n*IN, *o*KO etc., tome os comprimentos GL, IN, KO etc., inversamente proporcionais CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2} etc., e as forças daqueles planos serão como os comprimentos assim tomados, e, portanto, a soma das forças será como a soma dos comprimentos, isto é, a força do sólido todo será como a área GLOK estendida infinitamente em direção a OK. Mas aquela área (pelos conhecidos métodos das quadraturas) é inversamente como CG^{n-3} e, portanto, a força do sólido todo é inversamente como CG^{n-3}. Q.E.D.

CASO 2 – Localize agora o corpúsculo C naquele lado do plano *l*GL que está dentro do sólido, e tome a distância CK igual à distância CG. E a parte do sólido LG*lo*KO delimitada pelos planos paralelos *l*GL, *o*KO, atrairá o corpúsculo C, situado no meio, nem mais para um lado, nem mais para outro, as ações contrárias dos pontos opostos cancelando-se mutuamente em razão da sua igualdade. Portanto, o corpúsculo C é atraído apenas pela força do sólido situado além do plano OK. Mas esta força (pelo Caso 1) é inversamente como CK^{n-3}, isto é (porque CG, CK são iguais), inversamente como CG^{n-3}. Q.E.D.

COROLÁRIO I – Assim, se o sólido LGIN for delimitado, em cada lado, por dois planos paralelos infinitos LG, IN, sua força atrativa será conhecida, subtraindo-se da força atrativa de todo o sólido infinito LGKO a força atrativa da parte mais distante NIKO, infinitamente estendida em direção a KO.

COROLÁRIO II – Se a parte mais distante deste sólido for desconsiderada, porque sua atração comparada à atração da parte mais próxima é desprezível, a atração da parte mais próxima, à medida que a distância cresce, diminuirá aproximadamente na razão da potência CG^{n-3}.

COROLÁRIO III – E, assim, se qualquer corpo finito, plano de um lado, atrair um corpúsculo situado em oposição ao meio daquele plano, e a distância entre o corpúsculo e o plano, comparada com as dimensões do corpo atrativo, for extremamente pequena; e se o corpo atrativo consistir de partículas homogêneas, cujas forças atrativas diminuem na razão de qualquer potência das distâncias maior do que a quarta; a força atrativa do corpo todo diminuirá muito aproximadamente na razão de uma potência cuja base é aquela distância muito pequena e o índice é o índice anterior da força menos 3. Entretanto, esta asserção não se aplica para um corpo formado de partículas cujas forças atrativas diminuem na razão da terceira potência das distâncias; porque, neste caso, a atração da parte mais remota do corpo infinito, como no segundo Corolário, é sempre infinitamente maior do que a atração da parte mais próxima.

Escólio

Se um corpo é atraído perpendicularmente em direção a um plano dado, e, a partir da lei de atração dada, o movimento do corpo é requerido; o Problema será resolvido procurando-se (pela Proposição XXXIX) o movimento do corpo que desce em uma linha reta em direção àquele plano, e

(pelo Corolário II das Leis) compondo aquele movimento com um movimento uniforme realizado em direção às linhas paralelas àquele plano. E, ao contrário, se for requerida a lei da atração que tende para o plano em direções perpendiculares, pela qual o corpo pode ser movido em qualquer linha curva dada, o Problema será resolvido da mesma forma que o terceiro Problema.

Mas, as operações podem ser reduzidas decompondo-se as ordenadas em séries convergentes. Se, para uma base A, o comprimento B fosse ordenadamente aplicado em qualquer ângulo dado, e se esse comprimento fosse como qualquer potência da base $A^{m/n}$; e se for procurada a força com a qual um corpo, quer atraído em direção à base ou afastado dela em direção àquela ordenada, pode ser levado a mover-se na linha curva que aquela ordenada descreve com sua extremidade superior; admito que a base seja aumentada por uma parte bem pequena O, e decomponho a ordenada $(A + O)^{m/n}$ em uma série infinita $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ etc., e admito a força proporcional ao termo desta série no qual O é de duas dimensões, isto é, ao termo $\frac{mm-mn}{2nn} . OOA^{\frac{m-2n}{n}}$. Portanto, a força procurada é como $\frac{mm-mn}{nn} . A^{\frac{m-2n}{n}}$, ou, o que é o mesmo, como, $\frac{mm-mn}{nn} . B^{\frac{m-2n}{m}}$. Se a ordenada descrever uma parábola, m sendo = 2 e n sendo = 1, a força será como a quantidade dada $2B^0$ e, portanto, é dada. Assim, com uma força dada, o corpo mover-se-á em uma parábola, como *Galileu* demonstrou. Se a ordenada descrever uma hipérbole, m sendo = 0 – 1, e n = 1, a força será como $2A^{-3}$ ou $2B^3$; e, portanto, uma força igual ao cubo da ordenada moverá o corpo em uma hipérbole. Mas deixando de lado Proposições deste tipo, vou tratar de outras relacionadas a movimentos aos quais ainda não fiz referência.

» SEÇÃO XIV

O movimento de corpos muito pequenos quando agitados por forças centrípetas que tendem para as várias partes de qualquer corpo maior

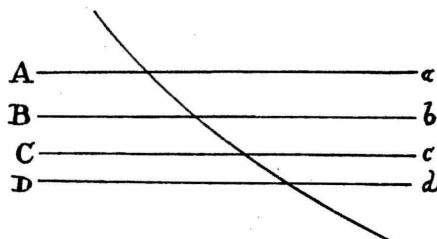
PROPOSIÇÃO XCIV. TEOREMA XLVIII

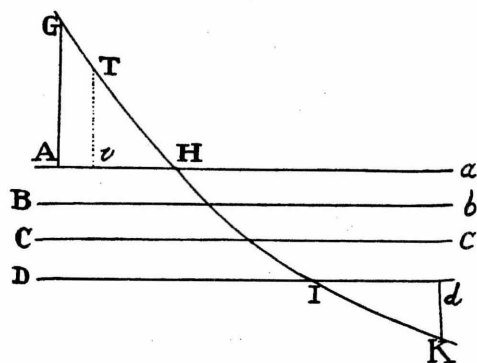
Se dois meios semelhantes forem separados um do outro por um espaço limitado em ambos os lados por planos paralelos, e um corpo em sua passagem por esse espaço for atraído ou impelido perpendicularmente na direção de um daqueles meios, e não for agitado ou obstruído por qualquer outra força; e a atração em todo lugar for a mesma a distâncias iguais a partir de qualquer dos planos, em direção ao mesmo lado do plano, afirmo que o seno de incidência sobre qualquer dos planos estará em uma dada razão para o seno de emergência do outro plano.

CASO 1 – Sejam A*a* e B*b* dois planos paralelos e faça o corpo incidir sobre o primeiro plano A*a* na direção da linha GH, e durante toda sua passagem através do espaço intermediário faça-o ser atraído ou impelido em direção ao meio de incidência, e, por aquela ação, faça-o descrever uma linha curva HI, emergindo na direção da linha IK. Trace IM perpendicularmente a B*b*, o plano de emergência, encontrando em M a linha de incidência GH prolongada, e em R o plano de incidência A*a*; e estenda a linha de emergência KI até encontrar HM em L. Em torno do centro L, com o raio,

LI, descreva um círculo cortando tanto HM em P e Q, como MI estendida em N; e, primeiro, se a atração ou impulso forem supostos uniformes, a curva HI (pelo que *Galileu* demonstrou) será uma parábola, cuja propriedade é a de um retângulo sob seu *latus rectum* dado, e a linha IM igual ao quadrado de HM; e, além disso, a linha HM será bisseccionada em L. Assim, se em direção a MI for traçada a perpendicular LO, então MO, OR serão iguais; e adicionando as linhas iguais ON, OI, os totais MN, IR também serão iguais. Portanto, uma vez que IR é dada, MN também é dada, e o retângulo MI.MN está para o retângulo sob o *lactus rectum* e IM, isto é, para HM^2, em uma razão dada. Mas o retângulo MI.MN é igual ao retângulo MP.MQ, isto é, à diferença dos quadrados ML^2, e PL^2 ou LI^2; e HM^2 tem uma dada razão para sua quarta parte ML^2; portanto, a razão de $ML^2 - LI^2$ para ML^2 é dada, e, por conversão, a razão de LI^2 para ML^2, e sua raiz quadrada, a razão de LI para ML. Mas em qualquer triângulo, como LMI, os senos dos ângulos são proporcionais aos lados opostos. Portanto, a razão do seno do ângulo de incidência LMR para o seno do ângulo de emergência LIR é dada. Q.E.D.

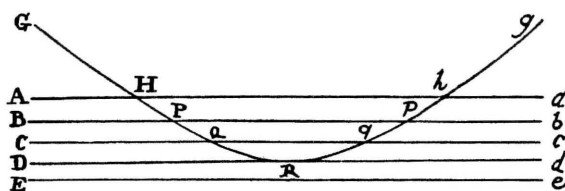
CASO 2 – Faça agora o corpo passar sucessivamente através de vários espaços limitados pelos planos paralelos A*ab*B, B*bc*C etc.; sendo influenciado por uma força que é uniforme em cada um deles separadamente, mas diferente nos espaços diferentes; e pelo que foi há pouco demonstrado, o seno do ângulo de incidência no primeiro plano A*a* está para o seno de emergência do segundo plano B*b* em uma razão dada; e este seno de incidência sobre o segundo plano B*b* estará para o seno de emergência do terceiro plano C*c* em uma razão dada; e este seno para o seno de emergência do quarto plano D*d* em uma razão dada; e assim por diante, *in infinitum*; e,

pela multiplicação de iguais, o seno de incidência no primeiro plano está para o seno de emergência do último plano em uma razão dada. Faça agora os intervalos dos planos serem diminuídos, e seu número ser aumentado infinitamente, tal que a ação de atração ou impulso, exercida de acordo com qualquer lei dada, torne-se contínua, e a razão do seno de incidência no primeiro plano para o seno de emergência do último plano será, então, conhecida. Q.E.D.

Proposição XCV. Teorema XLIX

O mesmo sendo suposto, afirmo que a velocidade do corpo antes de sua incidência está para a sua velocidade após a emergência como o seno de emergência para o seno de incidência.

Faça AH e Id iguais, e levante as perpendiculares AG, dK encontrando as linhas de incidência e emergência GH, IK em G e K. Em GH, tome TH igual a IK, e em direção ao plano Aa faça incidir a perpendicular Tv. E (pelo Corolário II das Leis do Movimento) faça o movimento do corpo ser decomposto em dois, um perpendicular aos planos Aa, Bb, Cc etc., e outro paralelo a eles. A força de atração ou impulso, agindo em direções perpendiculares àqueles planos, não altera de forma alguma o movimento em direções para-

lelas; e o corpo, portanto, prosseguindo com este movimento, passará em tempos iguais através daqueles intervalos paralelos iguais, que situam-se entre a linha AG e o ponto H, e entre o ponto I e a linha *d*K; isto é, ele descreverá as linhas GH, IK em tempos iguais. Portanto, a velocidade antes da incidência está para a velocidade após a emergência como GH para IK ou TH, isto é, como AH ou I*d* para *v*H, isto é (considerando TH, ou IK, como raio), como o seno de emergência para o seno de incidência[1]. Q.E.D.

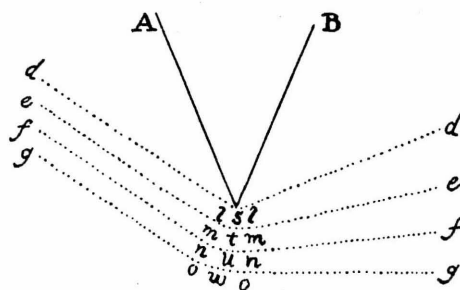
Proposição XCVI. Teorema L

O mesmo sendo suposto, e sendo mais rápido o movimento antes da incidência do que após, afirmo que, se a linha de incidência for inclinada continuamente, o corpo finalmente será refletido, e o ângulo de reflexão será igual ao ângulo de incidência.

Imagine o corpo passando entre os planos paralelos A*a*, B*b*, C*c* etc.; descrevendo arcos parabólicos como acima; e faça esses arcos serem HP, PQ, QR etc. E faça a inclinação da linha de incidência GH para o primeiro plano A*a* ser tal que o seno de incidência esteja para o raio do círculo do qual ele é seno, na mesma razão que o mesmo seno de incidência tem para com o seno de emergência do plano D*d* no espaço D*de*E; e quando o seno de emergência estiver tornando-se igual ao raio, o ângulo de emergência será um ângulo reto, e, portanto, a linha de emergência coincidirá com o plano D*d*. Faça o corpo chegar a este plano no ponto R; e como a linha de emergência coincide com aquele plano, é evidente que o corpo não pode prosseguir em direção ao plano E*e*. Mas também não pode prosseguir na linha de emergência R*d*; pois é sempre atraído ou impelido em direção ao meio de incidência. Retornará, portanto, entre os planos C*c*, D*d*, descrevendo um arco de parábola QR*q*, cujo vértice principal (pelo que *Galileu* demonstrou) está em R, e corta o plano C*c* em *q*, com o mesmo ângulo que antes em Q;

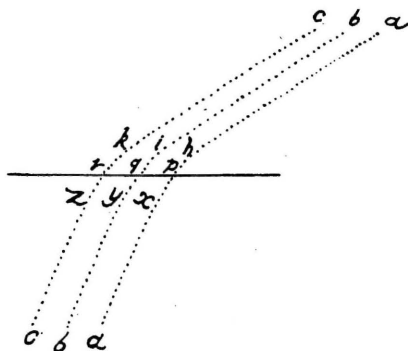
1. Ver nota 26 do Apêndice.

então, prosseguindo nos arcos parabólicos *qp, ph* etc., semelhantes e iguais aos arcos anteriores QP, PH etc., cortará o resto dos planos com os mesmos ângulos em *p, h* etc., como fez antes em P, H etc.; e emergirá, no final, com a mesma inclinação em *h* com a qual incidiu primeiro naquele plano em H. Imagine agora que os intervalos dos planos A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* etc., são infinitamente diminuídos, e que seu número é infinitamente aumentado, tal que a ação da atração ou impulso, exercida de acordo com qualquer lei dada, possa tornar-se contínua; e o ângulo de emergência, permanecendo sempre igual ao ângulo de incidência, será também, no final, igual a este. Q.E.D.

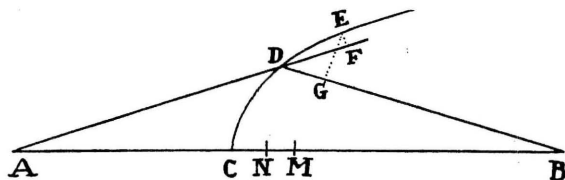
Escólio

Essas atrações guardam uma grande semelhança com as reflexões e refrações da luz realizadas em uma dada razão das secantes, como foi descoberto por *Snell*; e, conseqüentemente, em uma dada razão dos senos, como foi mostrado por *Descartes*. Pois, é hoje certo, a partir do fenômeno dos satélites de Júpiter, confirmado pelas observações de diferentes astrônomos, que a luz propaga-se em sucessão e requer cerca de sete a oito minutos para viajar do Sol até a Terra. Além disso, os raios de luz que estão em nosso ar (como foi mais tarde descoberto por *Grimaldi*, admitindo luz em um quarto escuro através de um pequeno orifício, experiência que eu também tentei), em sua passagem próximo às angulosidades dos corpos, sejam eles transparentes ou opacos (tais como as bordas circulares ou retangulares de moedas de ouro, prata e bronze, ou de facas, ou de pedaços quebrados de pedra ou vidro), são dobrados ou defletidos[2] em torno daqueles corpos como se fos-

2. Ver nota 27 do Apêndice.

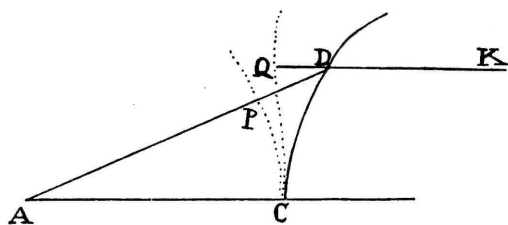
sem atraídos para eles; e aqueles raios que, em sua passagem, aproximam-se o máximo dos corpos são os mais defletidos, como se fossem os mais atraídos; fato este que eu mesmo cuidadosamente observei. E aqueles que passam a grandes distâncias são menos desviados, e aqueles em distâncias ainda maiores são um pouco defletidos na direção contrária, e formam três franjas de cores. A figura *s* representa a borda de uma faca, ou qualquer tipo de cunha A*s*B; e *gowog, fnunf, emtme, dlsld* são raios defletidos em direção à faca nos arcos *owo, nvn, mtm, lsl*; cuja deflexão é maior ou menor de acordo com sua distância da faca. Agora, uma vez que a deflexão contínua dos raios dá-se no ar fora da faca, segue que os raios que incidem sobre a faca são primeiro defletidos no ar, antes de tocarem a faca. E o caso é o mesmo com os raios que incidem no vidro. A refração, portanto, não se dá no ponto de in-

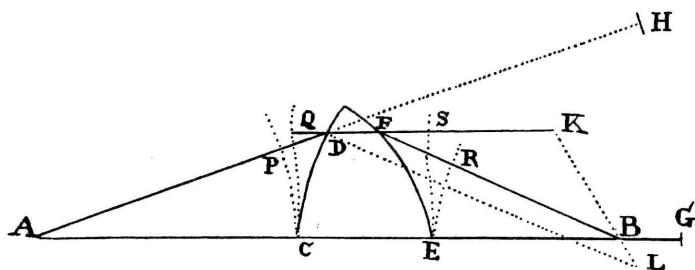
cidência, mas gradualmente, por uma deflexão contínua dos raios; o que é feito em parte no ar, antes de tocarem o vidro, e em parte (se não estou enganado) dentro do vidro, após terem nele penetrado; como está representado nos raios *ckzc, biyb, ahxa,* incidindo em *r, q, p,* e defletidos entre *k* e *z*, *i* e *y*, *h* e *x*. Portanto, por causa da analogia que há entre a propagação dos raios de luz e o movimento dos corpos, penso não ser errado acrescentar as seguintes Proposições para usos óticos; sem considerar a natureza dos raios de luz, ou averiguar se são corpos ou não, mas apenas determinando as curvas de corpos que são extremamente semelhantes às curvas dos raios.

Proposição XCVII. Problema XLVII

Supondo que o seno de incidência sobre qualquer superfície esteja em uma dada razão para o seno de emergência; e que a deflexão das trajetórias daque-

les corpos próxima à superfície dá-se em um espaço muito pequeno, que pode ser considerado como um ponto; é requerido determinar a superfície que faz com que todos os corpúsculos, partindo de qualquer lugar dado, convirjam para outro também dado.

Seja A o lugar a partir do qual os corpúsculos divergem; B o lugar para o qual eles devem convergir; CDE a linha curva que, por sua revolução em torno do eixo AB, descreve a superfície procurada; D, E, dois pontos quaisquer daquela curva; e EF, EG, perpendiculares que incidem nas trajetórias AD, DB dos corpos. Faça o ponto D aproximar-se e coalescer com o ponto E; e a razão final da linha DF, pela qual AD é aumentada, para a linha DG, pela qual DB é diminuída, será a mesma que a do seno de incidência para o seno de emergência. Portanto, a razão do aumento da linha AD para a diminuição da linha DB é dada; e, assim, se no eixo AB for tomado, em qualquer lugar, o ponto C pelo qual a curva CDE deve passar; e CM, o acréscimo de AC, for tomado naquela razão dada para CN, o decréscimo de BC; e a partir dos centros A, B, com os raios AM, BN, forem descritos dois círculos cortando-se em D; esse ponto D tocará a curva procurada CDE, e ao tocá-la arbitrariamente em qualquer lugar, determinará a curva. Q.E.I.

Corolário I – Fazendo o ponto A, ou B, prosseguir, às vezes, *in infinitum*, e, às vezes, mover-se em direção a outras partes do ponto C, obter-se-á todas aquelas figuras que *Descartes* exibiu em seus *Ótica* e *Geometria*, referentes à refração. A invenção das quais *Descartes* julgou conveniente ocultar, é explicada nesta Proposição.

Corolário II – Se um corpo incidindo em qualquer superfície CD na direção de uma linha reta AD, traçada de acordo com qualquer lei, deve emergir na direção de outra linha reta DK; e, a partir do ponto C, forem traçadas linhas curvas CP, CQ, sempre perpendiculares a AD, DK; os incrementos das linhas PD, QD, e, portanto, as linhas PD, QD, geradas por aqueles incrementos, serão como os senos de incidência e emergência um para o outro, e vice-versa.

PROPOSIÇÃO XCVIII. PROBLEMA XLVIII

O mesmo sendo suposto, se ao redor do eixo AB *for descrita qualquer superfície atrativa, como* CD, *regular ou irregular, através da qual os corpos, partindo do lugar dado* A, *tenham que passar; pede-se encontrar uma segunda superfície atrativa* EF, *que possa fazer aqueles corpos convergirem para um lugar dado* B.

Faça uma linha unindo AB cortar a primeira superfície em C e a segunda em E, com o ponto D tomado arbitrariamente. E, supondo que o seno de incidência na primeira superfície para o seno de emergência da mesma, e o seno de emergência da segunda superfície para o seno de incidência sobre a mesma, seja como qualquer quantidade dada M para outra dada N; então estenda AB até G, de maneira que BG esteja para CE como M - N para N; e AD para H, de maneira que AH seja igual a AG; e DF para K, de maneira que DK esteja para DH como N para M. Una KB, e em torno do centro D, com raio DH, descreva um círculo encontrando KB, estendida, em L, e trace BF paralelamente a DL; e o ponto F tocará a linha EF, que ao girar em torno do eixo AB, descreverá a superfície procurada. Q.E.F.

Ao conceber as linhas CP, CQ em todo lugar como perpendiculares a AD, DF, e as linhas ER, ES perpendiculares a FB, FD, respectivamente, e, portanto, QS sempre igual a CE; e (pelo Corolário II, Proposição XCVII) PD

estará para QD como M para N, e, assim, como DL para DK ou FB para FK; e, por subtração, como DL - FB ou PH - PD - FB para FD ou FQ - QD; e, por adição, como PH - FB para FQ, isto é (como PH e CG, QS e CE, são iguais), como CE + BG - FR para CE - FS. Mas (porque BG está para CE como M - N para N), resulta também que CE + BG está para CE como M para N; e, portanto, por subtração, FR está para FS como M para N; e, assim (pelo Corolário II, Proposição XCVII), a superfície EF força um corpo que incide sobre ela na direção DF, a prosseguir na linha FR até o lugar B. Q.E.D.

Escólio

Da mesma forma, pode-se supor para três ou mais superfícies. Mas de todas as figuras, a esférica é a mais apropriada para usos óticos. Se as lentes objetivas dos telescópios forem construídas com dois vidros de forma esférica, contendo água entre eles, não é improvável que os erros das refrações, devido às partes extremas das superfícies dos vidros, possam ser corrigidos bastante acuradamente pelas refrações da água. Tais lentes objetivas devem ser preferidas às elípticas e hiperbólicas, não apenas porque podem ser construídas mais facilmente e com maior precisão, mas porque os feixes de raios situados fora do eixo da lente seriam mais acuradamente refratados por elas. Mas a diferente refrangibilidade dos diferentes raios é o obstáculo real que impede a ótica de se tornar perfeita por formas esféricas, ou quaisquer outras. A não ser que os erros daí resultantes possam ser corrigidos, todo o trabalho despendido em corrigir os outros terá sido completamente inútil.

» APÊNDICE HISTÓRICO E EXPLICATIVO

por Florian Cajori

1. *Fac-símile da folha de rosto da 1ª edição dos Principia.* Uma boa estimativa para a data na qual Newton fez alterações nesta página pode ser obtida a partir das seguintes considerações: as alterações de Newton na folha de rosto indicam que ele foi presidente da *Royal Society of London*, mas não que tenha sido nomeado Cavaleiro (Sir). Na 2ª edição dos *Principia*, em 1713, sua fidalguia aparece nas palavras "Auctore Isaaco Newtono, Equite Aurato". Sabemos que Newton foi eleito presidente da *Royal Society* em 30 de novembro de 1703, e que foi nomeado cavaleiro em 16 de janeiro de 1705. Portanto, as alterações na folha de rosto devem ter sido feitas no intervalo entre essas duas datas. Essa conclusão está de acordo com uma observação de Flamsteed a Pound[1], em 15 de novembro de 1704: "o livro [*Opticks*, de Newton] não produziu nenhum alarde, como os *Principia*, que, pelo que sei, ele o está preparando novamente para impressão com as correções necessárias". As alterações não foram impressas.

2. Frontispício. *Retrato de Newton.* A fotogravura foi feita a partir de um retrato de Newton, colado no segundo volume de um vasto trabalho intitulado *Heads in Taille Douce* (página 128). Este volume encontra-se na biblioteca Pepys, em Cambridge. Os mestres e membros do Magdalene College consentiram gentilmente que o retrato fosse fotografado para reprodução na presente edição dos *Principia* de Newton. J.

1. Edleston, *op. cit.*, página XV.

Edleston[2] apresenta uma gravura preparada a partir desse mesmo retrato, mas o aqui mostrado é uma reprodução fotográfica. O desenho original é em nanquim. Quanto ao ano em que foi feito, Edleston conclui (p. XIX):
"Ao situarmos, portanto, a data do retrato num período de alguns anos antes ou depois de 1691, talvez não estejamos muito longe da verdade. Se esta suposição for bem fundamentada, este retrato pode ser considerado como o mais interessante de todos os retratos conhecidos de nosso filósofo, mostrando-o em um momento de sua vida mais próximo daqueles memoráveis dezoito meses que lhe custou a produção do grande trabalho que imortalizou seu nome".

3. *Prefácio à primeira edição dos Principia.* Este prefácio à 1ª edição não apresenta data, nem assinatura do autor. A assinatura "Is. Newton" e a data "Dabam Cantabrigiae, e Collegio S. Trinitatis, Maii 8. 1686" apareceram pela primeira vez na 2ª edição, em 1713. O prefácio à 1ª edição da *Opticks* de Newton, em 1704, não apresenta data alguma, enquanto na 2ª edição, em 1718, a data "April 1, 1704" é acrescentada. Provavelmente, Newton acabou reconhecendo a importância das datas no curso de sua amarga controvérsia com Leibniz, sobre a invenção do cálculo.

4. Alterações e correções feitas na preparação da segunda edição dos *Principia.* O relato das alterações indicadas no curto Prefácio de Newton pode ser suplementado pelos seguintes comentários de Ball[3]: "Possuo em manuscrito uma lista de acréscimos e variações feitas na 2ª edição; as alterações são bastante numerosas, de fato verifico que, das 494 páginas, (isto é, 510 menos 16) da 1ª edição, 397 são mais ou menos modificadas na 2ª edição. As alterações mais importantes são: o novo Prefácio de Cotes; as Proposições sobre a resistência dos fluídos, Livro II, seção VII, Proposições 34-40; a teoria lunar, no Livro III; a Proposição sobre a precessão dos equinócios, Livro III, Proposição 39; e as Proposições sobre a teoria dos cometas, Livro III, Proposições 41, 42".
Ao preparar a cópia para a 2ª edição dos *Principia,* Cotes teve muito cuidado em corrigir erros e imperfeições. Newton escreveu-lhe em 2 de outubro de 1709: "Não desejaria que você se desse ao trabalho de examinar todas as demonstrações nos *Principia.* É impossível imprimir o livro sem alguns erros, e se imprimi-lo pela cópia que lhe enviei, corrigindo apenas os erros que aparecem na leitura das páginas à medida que estas são impressas, você terá mais trabalho do que lhe cabe dar"[4]. Em 1713, após a 2ª edição haver saído da impressão, Newton enviou a Cotes uma lista de errata, pretendendo talvez que fosse impressa como uma tabela de errata. A isto Cotes replicou, em 22 de dezembro de 1713[5]: "Observo que você anotou cerca de 20 Erratas além daque-

2. J. Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes,* London, 1850, frontispício.
3. W.W. R. Ball, *An Essay on Newton's Principia,* London, 1893, p. 74.
4. Edleston, *op. cit.*, p. 5.
5. *Idem,* pp. 167-168.

las na minha tabela... acredito que não se surpreenderá se lhe disser que posso lhe enviar mais 20 tão importantes quanto aquelas, que casualmente observei e que parecem ter-lhe escapado; e longe de mim pensar que essas 40 são tudo que possa ser descoberto, muito embora pense que a Edição esteja muito correta. Estou certo de que o é bem mais do que a primeira, que foi impressa com cuidado suficiente; pois além de suas próprias correções e daquelas que lhe comuniquei durante a impressão do livro, arrisco dizer que fiz centenas, que nunca lhe comuniquei".

Certas alterações que ocorreram na 2ª edição dos *Principia* são mencionadas nas Notas 3, 19, 24, 26, 27, 29, 30, 39, 42, 45.

5. *Prefácio de Cotes para a 2ª edição dos Principia.* Foi por sugestão de Richard Bentley, Lente de Trinity College em Cambridge, que Cotes escreveu este Prefácio. "Tenho a permissão de Sir Isaac", escreveu Bentley, "para lembrá-lo daquilo que estivemos falando, um índice alfabético e um prefácio em seu próprio nome; se fizer o favor de prepará-los para serem impressos, após o meu retorno para Cambridge, ser-lhe-ei muito grato. Atenciosamente, R. Bentley"[6].

Cotes escreveu a Newton em 18 de fevereiro de 1712-3, a respeito do Prefácio: "Acho que será apropriado além da descrição do Livro e seus aperfeiçoamentos, acrescentar alguma coisa mais específica a respeito da maneira de filosofar utilizada, e onde ela difere da maneira de Descartes e outros, quero dizer, mostrando primeiro o princípio empregado. Isto eu não somente declararia, mas tornaria evidente por uma pequena dedução do Princípio da Gravidade a partir do Fenômeno da Natureza de uma forma simples, que possa ser compreendida por leitores comuns e sirva, ao mesmo tempo, como exemplo a eles do Método do Livro inteiro"[7]. Segue, então, um plano detalhado que posteriormente foi um pouco modificado. O próprio Newton preparou um Prefácio curto que tornou desnecessário que Cotes entrasse em um relato dos "aperfeiçoamentos" na 2ª edição dos *Principia.* O Prefácio de Cotes, portanto, restringe-se à "maneira de filosofar" e a um exame das objeções de Leibniz (sem mencionar seu nome) e do sistema de vórtices. Leibniz, em uma carta (9 de abril de 1716) escrita apaixonadamente, chama o Prefácio de "pleine d'aigreur" ("cheio de amargura"). Como mencionado, o objetivo principal do Prefácio foi combater a teoria dos vórtices de Descartes. A necessidade dessa discussão, vinte e seis anos depois do primeiro aparecimento dos *Principia* de Newton, indica o grande apelo popular das concepções de Descartes. Sua teoria dos vórtices foi sustentada nesta época (1713) não somente no continente europeu, mas também na Inglaterra. A Cosmologia Cartesiana invadiu a Inglaterra logo após a publicação por Descartes da sua teoria, em 1644. Henry More, do Christ's College, Cambridge, um dos primeiros membros da *Royal Society of London,*

6. *Idem*, p. 148.
7. *Idem*, pp. 151 e 154.

em seus primeiros anos manteve correspondência com Descartes e fora um de seus admiradores. Joseph Glanvill, amigo de More, do Exeter College, Oxford, também membro da *Royal Society*, escreveu apreciativamente sobre os vórtices de Descartes. Os escritos de Robert Boyle estão cheios de referências a Descartes, "o mais agudo filósofo moderno", ainda que, em Boyle, haja apenas uma referência, que eu pudesse encontrar, à teoria cartesiana dos vórtices, e esta referência é "sem permitir a esta hipótese ser mais do que não muito improvável"[8]. Robert Hooke escreveu criticando alguns aspectos da teoria dos vórtices[9].

A teoria dos vórtices de Descartes recebeu uma exposição popular no famoso livro-texto de Física escrito em francês por Rohault. Um médico suíço, Théophile Bonet, fez uma tradução latina desse texto, que apareceu em Genebra em 1674, e em Londres em 1682. Assim, a Inglaterra começou a usar este bem escrito livro-texto cinco anos antes da publicação dos *Principia*. A profunda divergência das mecânicas de Rohault e Newton aparece claramente na afirmativa de Rohault de que o movimento em um círculo é tão natural quanto em uma linha reta. A doutrina cartesiana tinha elementos de apelo popular. O leigo em matemática poderia entendê-la. Qualquer um já havia visto lascas de madeira rodopiar em redemoinhos nos rios. Qualquer um já havia visto um diminuto redemoinho de vento levantar a poeira em pequenos ciclones. Os planetas moviam-se como pedaços de madeira em redemoinhos. Estas figuras mentais eram convincentes. Ao contrário, a lei de Newton do inverso do quadrado na atração gravitacional nada significava para alguém não acostumado com o pensamento matemático[10]. Matemáticos britânicos como Halley, David e James Gregory, Keill, Whiston, Cotes, Taylor, Robert Smith e Saunderson preferiam as doutrinas de Newton. O próprio Newton ensinou em Cambridge, certamente pelo menos até 1687[11], mas os detalhes de suas atividades como professor são excessivamente escassos. Após 1692, esteve doente por um longo período. Em 1696, foi nomeado diretor da Casa da Moeda. Foi sucedido na Cadeira Lucasiana em Cambridge por Whiston, em torno de 1701, que ensinou sobre a filosofia newtoniana. A partir desses fatos apenas, poder-se-ia inferir que o sistema de Newton substituiu facilmente o cartesiano nas universidades britânicas. Mas não foi bem assim; o sistema cartesiano mostrava uma vitalidade espantosa, mesmo em Cambridge. Por cerca de quarenta anos após a primeira publicação dos *Principia*, o sistema francês mantinha uma posição segura na Inglaterra. Ofereço uns poucos fatos para sustentar esta afirmativa. O ensaísta do Magdalen College, Oxford, Joseph Addison, proferiu um discurso em 1693, seis anos após a publicação dos *Principia* de Newton, no qual elogia Descartes, "que brava-

8. *Works of the Hounourable Robert Boyle*, vol. 5, London, 1772, p. 403.
9. Robert Hooke, *Micrographia*, London, 1665, pp. 60-61.
10. Sobre a dificuldade de se entender os *Principia*, veja Ball, *op. cit.*, pp. 114-116.
11. Edleston, *op. cit.*, p. xcviii.

mente estabelecera a verdade" contra os seguidores de Aristóteles[12]. Whiston[13] refere-se a David Gregory, que estava ensinando a doutrina de Newton em Edinburgh, "enquanto nós em Cambridge, pobres desgraçados, estávamos ignominiosamente estudando as hipóteses fictícias dos cartesianos". Já me referi à publicação na Inglaterra, em 1682, da física de Rohault, contendo uma exposição popular do sistema de Descartes. Quinze anos depois, em 1697, uma nova tradução deste livro para o latim saiu da pena de Samuel Clarke, do Caius College, Cambridge, a quem Whewell descreve como um "amigo e discípulo de Newton". Enquanto a tradução estava sendo feita, Whiston expôs a Clarke sua idéia sobre a conveniência de tal tradução, nos seguintes termos[14]: "Uma vez que os jovens da universidade devem ter, no momento, algum Sistema de Filosofia Natural para seus estudos e exercícios; e uma vez que o sistema verdadeiro de Sir Isaac Newton ainda não foi suficientemente facilitado para este propósito, não é impróprio, para o benefício deles, traduzir e usar ainda o sistema de Rohault... mas, logo que a filosofia de Sir Isaac Newton vier a ser melhor conhecida, somente esta deverá ser ensinada, e as outras abandonadas". Deve ser acrescentado que o tratado de Rohault era considerado, de longe, o melhor em Física geral naquele tempo. A tradução de Clarke, no melhor latim, desempenhou um papel importante como livro-texto, tanto em faculdades inglesas como americanas. John Playfair[15] afirma que esta nova e elegante tradução continha notas adicionais, nas quais Clarke explicava as concepções de Newton, e, assim, as notas continham virtualmente uma refutação do texto, evitando, entretanto, qualquer aparência de controvérsia. Assim, continua Playfair, "a filosofia newtoniana penetrou primeiro na universidade de Cambridge sob a proteção dos cartesianos". A afirmativa de Playfair precisa de correção em um aspecto. A edição de Rohault por Clarke, como impressa em 1697, não continha os acréscimos como notas de rodapé, mas como anotações no final do volume; elas são mais curtas que nas edições posteriores e referem-se a escritores antigos, e, de fato, não refutam a teoria dos vórtices de Descartes. A refutação de Clarke apareceu mais tarde. Foram publicadas quatro edições da tradução latina feita por Clarke. A terceira, concluída em 1710, difere da primeira por ter notas, não no final do volume, mas como notas de rodapé, bastante ampliadas. Esta terceira edição (talvez também a segunda, de 1703, que não vi) contém uma nova anotação no que diz respeito à teoria dos vórtices de Descartes e assinala conclusivamente que estes vórtices realmente não explicam os fatos observados. Não explicam o movimento de cometas que interceptam os planos orbitais dos planetas com qualquer ângulo; eles fariam um planeta mover-se mais rapidamente quanto mais distante estivesse do Sol, enquanto, na

12. D. Brewster, *Memoirs of Sir Isaac Newton*, 2 ed., vol. I, Edinburgh, 1860, pp. 291 e 292.
13. Whinston, *Memoirs of his Own Life*, p. 36, citado por Brewster, *op. cit.*, vol. I, p. 291.
14. Brewster, *op. cit.*, vol. I, p. 295.
15. J. Playfair, "Dissertation Forth", em *Encyclopaedia Britannica*, 8 ed., vol. I, pp. 609 e 610; citado por Brewster, *op. cit.*, vol. I, pp. 290 e 291.

verdade, ele move-se mais vagarosamente quando naquela posição. Sobre esse assunto, há uma longa citação dos *Principia* de Newton. A popularidade das edições posteriores de Rohault por Clarke pode ser atribuída em grande parte às notas de rodapé. Tomado como um todo, o texto era aceitável tanto para seguidores de Newton quanto de Descartes. Ambos os lados eram apresentados de maneira imparcial. O professor Playfair chama atenção para o fato de que os tutores* de faculdade, cujas instruções "constituem o sistema real e eficiente" em uma universidade britânica, às vezes sustentavam concepções diferentes daquelas dos docentes. Assim, o professor Keill introduziu em suas aulas a filosofia newtoniana em Oxford, mas os tutores de Oxford "não se amoldaram àquele padrão até muito tempo depois". Ball afirma que "em Cambridge, até recentemente, os professores apenas raramente mantinham contato ou adaptavam suas aulas para a maior parte dos estudantes... Por essa razão, se desejarmos descobrir a quem se deve a divulgação de um estudo geral da filosofia newtoniana, não devemos olhar para as aulas ou escritos de Newton, mas entre os *proctors***, *moderators**** ou tutores de faculdades que aceitavam sua doutrina"[16]. A edição de Rohault por Clarke ajustava-se, portanto, às necessidades dos tutores, seja quais fossem concepções científicas a que eram favoráveis. Que, em 1723, o texto de Rohault não era, de maneira alguma, desacreditado na Inglaterra, fica claro a partir do aparecimento de uma tradução inglesa da edição de Clarke, com notas. Outras edições tardias desta tradução apareceram em 1729 e 1735. De acordo com a biografia de Samuel Clarke, escrita por Hodlay, Rohault ainda era o livro-texto de Cambridge em 1730, três anos após a morte de Newton e quarenta e três anos depois do aparecimento dos *Principia*. Era como se duas práticas diferentes de instrução prosseguissem por muitos anos sem controvérsia aberta entre as duas facções, uma favorecendo Descartes como exposto por Rohault, a outra favorecendo Newton como exposto nas notas de rodapé de Clarke, nas aulas de Whiston publicadas em 1710 e 1716, e nos ensinamentos de Rochard Laughton, um notável instrutor em Clare Hall, Cambridge. Desaguliers[17], que mudou-se de Oxford para Londres em 1713, informa-nos que "encontrou a filosofia newtoniana geralmente aceita entre pessoas de todas as posições e profissões, e mesmo entre senhoras, com o auxílio de experimentos". Um tanto em desacordo com esta afirmativa está a de Voltaire[18], que visitou a Inglaterra em 1727 e

* Em Cambridge, Oxford e Dublin, um membro graduado de uma faculdade a quem é designado o acompanhamento de um estudante (N.T.).

** Procuradores. Em uma universidade, um de cada dois ou mais funcionários graduados periodicamente eleito, com funções primárias de representação e administração de fundos (N.T.).

*** Em Cambridge, um de cada dois funcionários graduados, anualmente apontado para presidir e responsabilizar-se pelos exames de distinção em matemática (N.T.).

16. W.W. R. Ball, *History of the Study of Mathematics at Cambridge*, Cambridge, 1889, p. 74.
17. J. T. Desaguliers, *Physico-Mechanical Lectures*, London, 1717; citado por W. Whewell, *History of the Inductive Sciences*, vol. 1, ed. 3, New York, 1875, p. 426.
18. F. M. A. Voltaire, citado por Brewster, *op. cit.*, vol. I, p. 290.

declarou que apesar de Newton ter vivido por mais de quarenta anos após a publicação dos *Principia*, mesmo na época de sua morte ele não tinha mais do que vinte seguidores na Inglaterra. Mas Voltaire[19] também disse: "Um francês que chega em Londres encontra uma grande mudança na filosofia, como em outras coisas. Ele deixou o mundo cheio, ele o encontra vazio. Em Paris, você vê o universo composto de vórtices de matéria sutil, em Londres não vemos nada do tipo".

No continente europeu, os vórtices de Descartes desfrutaram de uma vida mais longa. Foram feitas tentativas por Huygens, Perrault, Johann Bernoulli II e outros, de eliminar alguns dos defeitos óbvios da teoria original dos vórtices, mas, por meados do século XVIII, o sistema newtoniano já tinha conseguido completa superioridade.

O prefácio de Cotes é de importância histórica em outros aspectos. É interpretado como uma defesa da teoria da "ação à distância " (veja nota 8), e da teoria de que a gravidade é uma propriedade inata da matéria (veja nota 6).

6. Prefácio de Cotes. *A natureza da gravidade.* As palavras de Cotes podem ter contribuído para um mau entendimento das concepções de Newton. Cotes diz "que o atributo da gravidade é encontrado em todos os corpos" e que "a gravidade deve ter um lugar entre as qualidades primárias de todos os corpos"; ele se refere à "natureza da gravidade em corpos terrestres". Expressões desse tipo parecem implicar que a gravidade é uma propriedade inerente à matéria. Frases dos *Principia* de Newton (1687) parecem levar a uma implicação semelhante. Newton afirma (Livro I, Proposição LX): "Se dois corpos [...] atraindo-se com forças inversamente proporcionais ao quadrado de sua distância"; (Livro I, Proposição LXIX) " as forças absolutas dos corpos atrativos"; (Livro I, Proposição LXXII) "a atração de um corpúsculo em direção às diversas partículas de uma esfera"; (Livro I, Proposição LXXV) "a atração de cada partícula é inversamente como o quadrado de sua distância a partir do centro da esfera atrativa"; (Livro I, Proposição LXXVII) "faça agora o corpúsculo P atrair a esfera "; (Livro III, Proposição V) "Júpiter e Saturno [...] pelas suas atrações mútuas perturbam sensivelmente cada um o movimento do outro". Nessas expressões, os "corpos" ou "corpúsculos" são descritos como ativos, como "atrativos". Eles não são passivos como um pedaço de madeira levado por um redemoinho num rio, ou como um planeta seria arrastado passivamente através do espaço por um vórtice cartesiano. Era fácil, portanto, concluir que na teoria newtoniana a gravidade é uma propriedade inata, inerente da matéria. Realmente, tal interpretação foi feita no continente europeu por escritores como Huygens, Lalande, Bordas-Demoulin e outros[20], e foi mantida, em geral, por astrônomos e físicos. Assim, após a publicação dos *Principia* em 1687, Huygens imedia-

19. Voltaire, *Eléments de la philosophie de Newton*, 1783; Oeuvres, vol. 31, 1785, citado por Whewell, *op. cit.*, vol. I, 1875, p. 431.
20. Edleston, *op. cit.*, p. 159.

tamente abandonou a explicação do movimento planetário pela teoria dos vórtices de Descartes, e proclamou sua adesão à mecânica celeste de Newton. Mas Huygens não aceitou a concepção de que a gravitação fosse uma propriedade inata da matéria, que ele atribuía à filosofia newtoniana. Neste ponto, Huygens rejeitou o que interpretou ser a doutrina de Newton, e manteve sua adesão à de Descartes[21].

Embora leitores da 1ª edição dos *Principia* tivessem alguma justificativa para atribuir a Newton a concepção segundo a qual a gravidade seria uma propriedade inata à matéria, estavam, todavia, enganados. Na 1ª edição, Newton não fez nenhuma declaração explícita sobre este ponto. Sabemos hoje que antes de publicar seu grande livro, já em 28 de fevereiro de 1678-1690, em uma carta a Robert Boyle[22], ele especulava sobre a "origem da gravidade" e tentava explicar a atração pela ação de um "éter", que consistia de "partes que diferiam entre si por graus indefinidos de sutileza" (veja Nota 55, Livro 2). É evidente que Newton não acreditava na gravidade como uma propriedade inata dos corpos mais do que Descartes. Mas leitores da 1ª edição dos *Principia* não tinham meios de sabê-lo. Sua carta a Boyle não havia sido ainda tornada pública. Mesmo Bentley, grande amigo e admirador de Newton, inicialmente acolheu esta idéia errônea; em cartas a Bentley, de 1692-1693, Newton opôs-se enfaticamente à doutrina segundo a qual a gravidade seria uma propriedade inata da matéria, e também à doutrina da "ação à distância". Essas cartas, como aquela à Boyle, não foram impressas senão muitos anos depois, e não poderiam, portanto, influenciar imediatamente a opinião científica em geral. Em uma carta a Bentley[23], Newton escreveu: "Você às vezes fala da gravidade como essencial e inerente à matéria. Peço-lhe que não atribua essa noção a mim; pois a origem da gravidade é o que não pretendo descobrir, e, portanto, levaria mais tempo para refletir a respeito dela".

Em uma outra carta, Newton escreveu:

21. *Traité de la Lumière*, por C. H. D. Z., Leyden, 1690, pp. 125-180; *Discours de la cause de la pesanteur.* Já em 1669, Huygens leu na Academia de Paris uma especulação sobre a causa da gravidade, baseada em uma modificação dos vórtices cartesianos. Ele não publicou sobre este assunto antes de 1690. Quando os *Principia* apareceram em 1687, Huygens aceitou imediatamente a força centrípeta de Newton variando inversamente como o quadrado da distância, porque os movimentos no sistema solar eram explicados com maior sucesso por essa lei. Mas rejeitou a idéia newtoniana de que as partículas de matéria de todos os corpos se atraíam, pois não conseguia ver como tais atrações poderiam ser explicadas com base em algum princípio mecânico. Edleston (*op. cit.*, pp. xxxi e lix) faz o interessante relato de que, na única vez em que Newton e Huygens encontraram-se, em 1689, em um encontro da *Royal Society of London*, Huygens dissertou sobre a causa da gravidade, enquanto Newton discutiu a dupla refração em cristais da Islândia – cada um dos dois grandes físicos discursando sobre tópicos mais intimamente associados ao outro. Para detalhes, veja também F. Rosenberger, *Isaac Newton und seine physikalischen Principien*, Leipzig, 1895, pp. 234-248.
22. *Isaci Newtoni Opera* (ed. Horsley), vol. 4, 1782, pp. 385-394.
23. *Works of Richard Bentley*, vol. 3, London, 1838, pp. 210, 211. Carta de Newton a Bentley, "Trinity College, 17 de janeiro, 1692-3".

"É inconcebível que a matéria bruta e inanimada devesse, sem a medição de alguma outra coisa não-material, atuar sobre e afetar outra matéria, sem haver contato mútuo, como deveria ser se a gravitação fosse essencial e inerente a ela, no sentido de Epicuro. E esta é uma razão pela qual desejaria que você não atribuísse a gravidade inata a mim. Que a gravidade seja inata, inerente e essencial à matéria, de forma que um corpo possa atuar sobre outro a uma distância através do vácuo, sem a mediação de qualquer outra coisa, por e através da qual a sua ação e força possa ser transportada de um para outro, é para mim um absurdo tão grande que acredito que nenhum homem dotado de uma faculdade competente em assuntos filosóficos possa nele recair. A gravidade deve ser causada por um agente que atue constantemente de acordo com certas leis; mas, se este agente é material ou imaterial, deixo para a consideração dos meus leitores".

Na segunda edição dos *Principia* (1713), Newton tornou mais clara sua posição em três adendos ao texto de 1687. No Escólio que segue à Proposição LXIX do Livro I, Newton afirma: "Uso aqui a palavra *atração* de forma geral, para qualquer esforço que seja feito pelos corpos para aproximarem-se, se aquele esforço surge da ação dos corpos entre si, na medida em que tendem um para o outro ou perturbam-se por influências ("Spirits") emitidas; ou se surge da ação do éter ou do ar, ou de qualquer meio que seja, corpóreo ou incorpóreo, impelindo corpos de qualquer maneira lá colocados, uns em direção aos outros". Aqui ele mantém uma atitude agnóstica. No Livro III, na discussão das Regras de Raciocínio em Filosofia, ele acrescenta: "Todos os corpos, quaisquer que sejam, são dotados de um princípio de gravitação mútua [...] Não que eu afirme ser a gravidade essencial aos corpos; sua *vis insita* não significa nada mais que sua inércia". Finalmente, no Escólio Geral no final dos *Principia*, ele afirma: "Não formulo hipóteses" sobre a gravidade. Essa era a atitude adequada a ser adotada em um trabalho como os *Principia*. Ele descreveu suas concepções a este respeito para Boyle, como sendo "tão indigestas" que não estava "totalmente satisfeito" com elas.

Mais positiva que nos *Principia* foi a afirmativa aparecida no "anúncio" para a segunda edição do seu livro *Opticks*, de 16 de julho de 1717: "E para mostrar que não tomo a gravidade como uma propriedade essencial dos corpos, acrescentei uma Questão [Query 31] relacionada à sua origem; escolhi propô-la por meio de uma Questão porque ainda não estou satisfeito a seu respeito, por falta de experimentos".

Não apenas é um erro atribuir a Newton a doutrina segundo a qual a gravidade é uma qualidade inata de corpos, como parece também ser um erro atribuí-la a Cotes, apesar de algumas frases que citei de seu Prefácio. É o que se conclui a partir da correspondência entre Cotes e Samuel Clarke. Cotes submeteu a Clarke seu rascunho do Prefácio para a segunda edição dos *Principia*. Ele escreveu a Clarke[24]: "Agradeço-lhe por suas correções ao Prefácio e, particularmente, por sua sugestão em relação àque-

24. Edleston, *op. cit.*, pp. 150 e 159.

la passagem em que eu parecia afirmar que a gravidade fosse essencial aos corpos. Estou completamente de acordo com seu pensamento de que ela forneceria assunto para objeções capciosas, e, portanto, eu a suprimi imediatamente devido à menção feita pelo Dr. Cannon de sua objeção a mim, e assim ela jamais foi impressa [...] Meu intento com aquela passagem não era afirmar que a gravidade fosse essencial à matéria, mas sim que somos ignorantes das propriedades essenciais da matéria e que, com relação ao nosso conhecimento, a gravidade poderia possivelmente ter direito àquele título [de propriedade essencial], como as outras propriedades que mencionei. Pois entendo por propriedades essenciais aquelas sem as quais nenhuma outra pertencente à mesma substância pode existir: eu não pretenderia provar que fosse impossível para qualquer das outras propriedades dos corpos existir até mesmo sem extensão". A questão da natureza da gravidade adquiriu novo interesse com o advento da Teoria Geral da Relatividade de Einstein, de acordo com a qual a gravidade é encarada não como uma propriedade inata aos corpos, mas sim como uma certa modificação no espaço. De acordo com Einstein, a Terra produz nas suas vizinhanças um campo gravitacional, que, agindo sobre a maçã, provoca seu movimento de queda. No campo gravitacional de Einstein[25], em geral, um raio de luz propaga-se curvilineamente. A diferença entre a nova e a velha Física é assim enunciada por Eddington: "A lei da gravitação de Einstein controla uma quantidade geométrica, a curvatura, em contraste à lei de Newton, que controla uma quantidade mecânica, a força"[26].

7. Prefácio de Cotes. O termo de Cotes para a órbita terrestre é *orbis magnus* (a grande órbita). É um termo freqüentemente usado também por Newton para designar a órbita da Terra em sua revolução anual em torno do Sol. O termo foi introduzido por Copérnico (*De revolutionibus orbium caelestium*, Lib. I, Cap. X) e foi usado por Rhaeticus, Kepler e outros. A trajetória da terra era chamada de "a grande órbita" não por causa, é claro, de suas dimensões, pois as órbitas dos planetas superiores são maiores, mas devido à sua grande importância para o astrônomo prático, que deve ter conhecimento dela ao explicar os movimentos aparentes do Sol e dos planetas. Em todas as partes dos *Principia* e do *Sistema do Mundo* em que o termo *orbis magnus* aparece, substituí pela expressão "órbita da Terra". Posso acrescentar que o próprio Newton usa o nome "órbita da Terra" no seu *Opticks*, Livro II, Parte III, Proposição XI.

8. Prefácio de Cotes. *Ação à distância*. A doutrina da "ação à distância" na atração gravitacional foi erroneamente atribuída à Newton; ela seria mais apropriadamente atribuível a Cotes, que, em Prefácio à segunda edição dos *Principia*, argumenta contra a teoria dos vórtices de Descartes. Cotes realmente não usa o termo "ação à distância",

25. A. Einstein, *Relativity, The Special and General Theory*, tr. R. W. Lawson, New York, 1921, pp. 75 e 88.
26. A. S. Eddington, *The Nature of the Physical World*, New York, 1929, p. 133.

nem advoga explicitamente a concepção segundo a qual os espaços celestes estão vazios. Ele argumenta que, se um fluido celeste existe, "ele não tem inércia, porque não tem força resistente". As sentenças complicadoras de seu Prefácio são: "Aqueles que concebem os céus cheios de matéria fluida, mas supõem-na livre de qualquer inércia, negam o vácuo por palavras, mas permitem-no de fato. Pois, uma vez que tal matéria fluida não pode ser diferenciada do espaço vazio, a disputa é agora sobre nomes e não sobre a natureza das coisas". Samuel Clarke é mais preciso. Em uma das notas de rodapé de suas últimas edições de Rohault, refere-se explicitamente a "aquele imenso espaço que é livre de qualquer matéria".

Na nota 6 acima citei passagens retiradas de cartas de Newton a Bentley referentes à gravidade, em que ele diz: "Que um corpo possa atuar sobre outro a uma distância através do vácuo, sem a mediação de qualquer outra coisa, por e através da qual sua ação e força possa ser transportada de um para outro, é para mim um absurdo tão grande que acredito que nenhum homem dotado de uma faculdade competente em assuntos filosóficos possa nele recair".

Maxwell[27] diz: "Encontramos em sua *Optical Queries* (*Questões de Ótica*), e em suas cartas a Boyle, que Newton desde cedo tentara explicar a gravitação através da pressão de um meio, e que a razão pela qual não publicou essas investigações 'provinha apenas do fato de achar não ser capaz de levar em conta satisfatoriamente tal meio, a partir do experimento e da observação, e seu modo de operação para produzir os principais fenômenos da Natureza' [...]"[28]

"Enquanto a filosofia newtoniana estabeleceu bases na Europa, era a opinião de Cotes, e não a de Newton, que prevalecia, até que, finalmente, Boscovich propôs sua teoria, segundo a qual a matéria é uma *congérie* de pontos matemáticos, cada um deles dotado do poder de atrair ou repelir os outros de acordo com leis fixas. No seu mundo, a matéria é sem extensão, e contato é impossível. Ele não esqueceu, entretanto, de dotar seus pontos matemáticos de inércia".

Embora o termo "ação à distância" pareça muito simples, ele é sutil em uma inspeção mais rigorosa e alguns físicos salientaram "quão fracas são as bases sobre as quais negamos a ação principal à distância"[29].

Um evento importante na história da doutrina da "ação à distância" foi o aparecimento da teoria eletromagnética de Maxwell, na qual era sustentado que perturbações eletromagnéticas viajavam com velocidades *finitas*. Anteriormente, admitia-se que atrações e repulsões elétricas e magnéticas ocorressem instantaneamente.

O elemento *tempo* veio a ser considerado também na gravitação. A frase "ação à distância", em vez de ser usada no antigo sentido de inexistência de um meio interveniente

27. J. C. Maxwell, *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain*, vol. 7, 1873-1875, London, pp. 48 e 49.
28. C. MacLaurin, *Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*, London, 1748.
29. A. Schuster, *The Progress of Physics*, 1875-1908, Cambridge, 1911.

entre massas que se atraem, é empregada, a partir do advento da teoria da relatividade, para indicar uma ação *instantânea* à distância[30]. Em lugar de um agente, agora consideramos o tempo de ação. Mas, mesmo hoje, a concepção de Newton é mal apresentada. A "ação à distância" newtoniana é pensada como "ação imediata". Newton, por outro lado, postula um agente e dá a ele tempo para agir. Para estar seguro, em seus cálculos de atrações gravitacionais, ele supõe como uma aproximação necessária (sem ter qualquer dado experimental sobre a velocidade de propagação da ação gravitacional) que a ação é instantânea, mas não em suas discussões sobre a gravidade. Em uma carta a Boyle[31], ele especula sobre a causa da gravitação entre dois corpos que se aproximam. Eles "fazem o éter entre si ficar mais rarefeito"; e, novamente[32], em suas hipóteses sobre a luz, ele diz, "assim a atração gravitacional da Terra pode ser causada por uma condensação contínua de alguma espécie de espírito etéreo... de tal maneira... a fazê-lo [este espírito] descer com grande velocidade para um preenchimento [da região rarefeita]; em cuja descida ele pode arrastar consigo, para baixo, os corpos que ele permeia, com força proporcional às superfícies de todas as partes onde ele atua".

9. As alterações e acréscimos feitos na terceira edição dos *Principia* são indicados no Prefácio de Newton apenas de uma maneira geral. Uma lista detalhada foi preparada pelo astrônomo J. C. Adams, do Pembroke College, Cambridge, e impressa em *Memoirs... of Sir Isaac Newton* de David Brewster (2ª edição), vol. II, Edinburgh, 1860, Apêndice número XXX, pp. 414-419.
   Algumas mudanças que ocorreram na 3ª edição dos *Principia* são mencionadas nas notas 11, 19, 26, 29, 33, 39 e 42.

10. *Traduções dos Principia feitas por Motte e Thorp.* Na revisão da tradução de Motte do prefácio de Cotes e dos *Principia* de Newton, usou-se a tradução do Prefácio de Cotes e do primeiro livro dos *Principia* para o inglês, feitas por Robert (2ª edição, Londres, 1802). Algum auxílio ocasional adveio da tradução dos *Principia* para o alemão, feita por J. Ph. Wolfer, 1872. As figuras geométricas dos *Principia* foram retiradas da 3ª edição (1726).
    A tradução de Andrew Motte dos *Principia,* do latim para o inglês, foi feita em 1729, a partir da 3ª edição (1726).

30. É interessante mencionar que, em algum lugar, Laplace supôs que a transmissão da gravidade não fosse instantânea, e determinou que a gravidade deveria viajar sete milhões de vezes mais rápido do que a luz, para gerar os efeitos conhecidos na aceleração secular da Lua. A Lua, com suas sutis irregularidades orbitais, revela, neste problema como em outros, um comportamento traiçoeiro. O cálculo de Laplace revelou-se incompleto, e sua velocidade de propagação da gravidade ilusória (veja Laplace, *Mécanique Céleste,* Livre X, o término do capítulo VII).
31. *Isaaci Newtoni Opera, op. cit.,* vol. 4, p. 385.
32. S. P. Rigaud, *Historical Essay on the First Publication of Newton's Principia,* Oxford, 1838, Appendix, pp. 69 e 70.

11. Definição I dos *Principia. Quantidade de Matéria ou Massa.* Newton não define densidade. Sua definição de massa, como o produto da densidade e do volume, foi avaliada de maneira variada. Mach[33] diz: "Com relação ao conceito de massa, salientamos primeiro que a formulação de Newton, definindo a massa como a quantidade de matéria de um corpo, determinada pelo produto de volume e densidade, é infeliz. Uma vez que só podemos definir densidade como a massa de volume unitário, o círculo é óbvio". Mas não é fácil crer que Newton fosse culpado de um *argumentum in circulo* tão evidente. Crew[34] sustenta que "na época de Newton, densidade e gravidade específica eram empregadas como sinônimos, e a densidade da água era arbitrariamente tomada como unitária. As três unidades fundamentais empregadas... eram, portanto, densidade, comprimento e tempo, em lugar das nossas massa, comprimento e tempo. Em tal sistema, é tanto natural como logicamente permissível definir massa em termos de densidade". Newton dá uma definição de densidades iguais de corpos em uma passagem posterior nos *Principia* (Livro III, Proposição VI, Corolário IV), em que afirma: "Se todas as partículas sólidas de todos os corpos são da mesma densidade, e não podem ser rarefeitas sem poros, então um vazio, ou vácuo, deve ser admitido. Por corpos de mesma densidade refiro-me àqueles cujas inércias estão na proporção de seus volumes ['bulks']". Deve-se, também, notar que nesta passagem Newton não diz que as pequenas partículas sólidas, que ele supõe ser de mesma densidade, são todas de mesmo tamanho. Pois, se assim fosse, então as densidades dos corpos seriam proporcionais ao número dessas pequenas partículas em volumes iguais. Hoppe atribui este último conceito de densidade a Newton, e afirma que é encontrado anteriormente nos escritos de François Lubin, John Kepler, Pierre Gassendi e Robert Boyle[35].

Mas a idéia corpuscular de Newton, como descrita em seu *Opticks*, contraria a interpretação de Newton dada por Hoppe. Em seu *Opticks* (2ª edição, 1721, pp. 375-376), ele diz: "Parece-me provável que, no início, Deus tenha criado a matéria em partículas móveis, sólidas, massivas, duras e impenetráveis, de tais tamanhos e formas, com tais outras propriedades e em tal proporção para o espaço, dirigidas para o fim para o qual Ele as criou; e que estas partículas primitivas, sendo sólidas, são incomparavelmente mais duras, mesmo que nunca possam ser desgastadas ou quebradas em pedaços: nenhum poder comum sendo capaz de dividir o que o próprio Deus fez uno na primeira Criação".

No uso do conceito de massa, como diferente de peso, Newton teve precursores que perceberam a diferença entre massa e peso mais ou menos claramente. Crew encontra a mais antiga concepção quantitativa desta idéia na discussão de Huygens sobre a

33. E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, 8 ed., Leipzig, 1921, capítulo 2, parágrafo 3, p. 188.
34. H. Crew, *The Rise of Modern Physics*, Baltimore, 1928, p. 124.
35. E. Hoppe, *Archiv fur Geschichte der Mathematik, der Naturndwissenschaften un der Technik*, n. s., vol. II, 1929, pp. 354-361. Para declarações adicionais de Newton sobre a constituição da matéria, consulte *Sir Isaac Newton, 1727-1927. A Bicentenary Evaluation of his Work*, Baltimore, 1928, pp. 224 e 225.

força centrípeta, em 1673, que foi completamente discutida na sua obra póstuma *De vi centrifuga*, 1703. Huygens afirma que, quando partículas se movem com velocidades iguais ao longo de círculos iguais, as forças centrípetas estão umas para as outras como "os pesos das partículas", ou como suas "quantidades sólidas" – *sicut mobilium gravitates seu quantitas solidas*. Aqui, "quantidade sólida" indica massa. Hoppe reivindica o conceito de massa para Kepler, que denomina *moles*, como na seguinte citação da *Astronomia Nova* de Kepler (1609): "Se duas pedras fossem removidas para qualquer lugar do mundo, próximas uma da outra, mas fora do campo de força de um terceiro corpo, então as duas pedras, como dois corpos magnéticos, iriam juntar-se em algum lugar intermediário, cada uma aproximando-se da outra de uma distância proporcional à massa [*moles*] do outro"[36].

12. Livro I, Definição II. *Quantidade de Movimento*, como a expressão é usada nos *Principia*, é equivalente ao termo *momentum* em mecânica mais moderna, e é medida pelo produto da massa e da velocidade.

13. Escólio que segue à Definição VIII. *Movimento absoluto e tempo absoluto.* Newton observou que "as partes daquele espaço imóvel, no qual aqueles movimentos [absolutos] se realizavam, de modo algum são passíveis de observação pelos nossos sentidos". Mas acrescenta, "no entanto, a coisa não é totalmente desesperadora, pois temos alguns argumentos para guiar-nos, em parte a partir dos movimentos aparentes, que são as diferenças dos movimentos verdadeiros; em parte a partir das forças, que são as causas e efeitos dos movimentos verdadeiros etc." À luz do pensamento mais recente, a questão aparece em conexão com o movimento retilíneo, se a existência de movimento "aparente" ou relativo, como revelado por nossos sentidos, necessariamente traz consigo a existência de movimento absoluto, como é vagamente sugerido por Newton. Ou não é possível que o movimento relativo seja o único movimento retilíneo que exista? Imagine os automóveis A, B e C. B ganha de A com uma velocidade de 10 km/h, enquanto C, viajando ao longo da mesma estrada reta, na mesma direção, ganha de A com uma velocidade de 15 km/h. A partir da velocidade relativa de 5 km/h, que é a diferença das velocidades 15 e 10, não podemos descobrir a velocidade de A; A pode estar em repouso sobre a estrada ou movendo-se. É importante neste argumento a circunstância de que, a partir da velocidade de A, ou de seu estado de repouso sobre a estrada, a inferência de que tal velocidade, ou repouso, é absoluta não pode ser extraída por silogismo. "Movimento absoluto", diz Newton, "é a translação de um corpo de um lugar absoluto para um outro", e "repouso absoluto é a permanência de um corpo na mesma parte do... espaço imóvel". A existência de

36. J. Kepler, Introdução à *Astronomia Nova*, 1609, *Opera Omnia* (ed. Ch. Frisch), vol. 3, p. 151; *Lepler's Neue Astronomie*, ubersetzt von Max Caspar, Munchen-Berlin, 1929, p. 26.

repouso ou movimento absolutos não pode ser estabelecida meramente a partir da existência de repouso ou movimento relativos. Em nossa ilustração com movimento de automóveis, sabemos que a própria estrada está em movimento, sendo levada pela Terra em sua órbita, e assim por diante. Assim, somos forçados a voltar à própria confissão de Newton, de que não existe maneira de trazer movimento absoluto ou espaço absoluto à observação dos sentidos. Newton realmente não menciona um éter universal em sua discussão do movimento absoluto, mas poderia ter argumentado, como tem sido feito desde então, que o movimento através de tal meio constitui movimento absoluto. Aqui duas observações vêem à mente: a existência deste éter hipotético foi negada nos séculos XVIII e XX; e não se pode dizer que o movimento através deste éter aconteça "sob a observação dos sentidos".

Mais convincente é o comentário de Newton sobre rotação absoluta. Dois globos são ligados por uma corda a uma dada distância um do outro e giram em torno de seu centro comum de gravidade. A partir da tensão da corda, podemos determinar a velocidade angular. Aqui temos uma rotação, resultante de um experimento dinâmico mais ou menos familiar pela percepção dos sentidos, que não faz referência a posições terrestres, solares e estelares, e parece, portanto, absoluto, de certa forma, no mesmo sentido em que se diz que o pêndulo de Foucault demonstra a rotação absoluta da Terra. Se esta concepção é correta, então a dinâmica newtoniana lidava com uma rotação que era verdadeiramente absoluta, apesar de empírica. Não segue daí, poderia alguém perguntar, que o espaço, no qual a rotação tem lugar, deve ser absoluto? Newton realmente não tirou tal conclusão, mas comentaristas tem declarado que o absoluto da rotação e da aceleração forçaram Newton a reconhecer que o espaço não podia ser relativo para o movimento retilíneo, e absoluto para a rotação.

Comentários similares àqueles que fiz para o movimento retilíneo absoluto aplicam-se à discussão sobre o tempo absoluto. Poderia parecer, portanto, que a existência do movimento retilíneo absoluto e do tempo absoluto fossem postulados da mecânica newtoniana; eles não são baseados em evidência experimental e, assim, podem ser encarados como metafísicos. Parece não existir nenhum argumento *a priori* contra a aceitação de conceitos, alguns dos quais são observáveis ou metafísicos, como fundamentos da mecânica. Os dois tipos de conceitos podem formar uma estrutura perfeitamente sólida e coerente, que forneça resultados em concordância com dados observacionais, em um grau de precisão dentro da probabilidade de erro experimental. De fato, as hipóteses de Newton satisfizeram este teste nos desenvolvimentos científicos que se estenderam por um período de duzentos anos. Durante este tempo a Astronomia e a Física fizeram enormes avanços. A mecânica celeste floresceu, bem como a engenharia e a ciência física.

Com pressupostos estéticos ou com base na desconfiança para com a metafísica, pode-se dizer que uma ciência empírica deve estar baseada apenas sobre fenômenos observáveis. Receios de ordem religiosa levaram o Bispo Berkeley, em seu *Principles of*

Human Knowledge (1710) e em seu *Analyst* (1734), a objetivar contra o espaço absoluto. Mais recentemente, a conveniência de uma fundamentação puramente empírica foi enfatizada por Ernst Mach em seu *Die Mechanik*[37].

No século XIX, as pesquisas de Faraday e Maxwell sobre o eletromagnetismo levaram a resultados experimentais que podiam ser explicados apenas com a hipótese da existência de movimento relativo. Um magneto móvel dá origem a um campo magnético e induz uma corrente elétrica em condutores vizinhos, com relação aos quais ele se move. Este é o fenômeno fundamental em dínamos geradores de corrente. A velocidade do magneto pode ser considerada absoluta? "Movimento Absoluto", de acordo com Newton, é a "transição de um corpo de um lugar absoluto para outro"; agora, o "lugar" é absoluto quando o "espaço" é absoluto e o "espaço absoluto" existe "por sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa". Então, um magneto, se em movimento absoluto, "sem relação com qualquer coisa externa" (nem mesmo um condutor vizinho), não poderia gerar corrente elétrica. Se, em vez de um magneto móvel, considerarmos uma carga elétrica móvel, comentários semelhantes se aplicam. Claramente, os fenômenos eletromagnéticos invocam velocidades que são "relativas". Tais considerações, entretanto, não excluíram a "velocidade absoluta" da Física, pois outros fenômenos poderiam necessitar do conceito de absoluto e ainda não foi reconhecido que todos os átomos e, portanto, toda matéria, são realmente elétricos.

Uma situação mais séria surgiu próximo do final do século XIX. O éter luminoso de Newton, Huygens e Hooke no século XVII, que fora descartado pela maioria dos cientistas no século XVIII, foi restabelecido no século XIX. A crença dominante era a de que este éter estava estagnado, e que a Terra podia mover-se através dele, sem arrastá-lo consigo. Nas mentes de muitos, este éter estagnado constituía um sistema de referência fundamental na explicação do movimento absoluto. Mas o éter estagnado não era de todo satisfatório e uns poucos físicos, como G. G. Stokes, defenderiam a idéia de um éter que era arrastado pela Terra, como a água por um navio móvel. Podia esta questão ser decidida por experimento? Para respondê-la, Michelson e Morley, em 1887, realizaram o famoso experimento[38] em Cleveland, Ohio, o qual dizse ter Michelson chamado de "experimento infeliz", pois não resultou em um tratamento satisfatório da antiga mecânica newtoniana. Se a Terra não arrastava consigo o éter, haveria, então, um vento de éter, a assim chamada "deriva do éter" ["ether drift"]. O resultado da experiência não revelou tal movimento de "arraste", de forma que, como interpretado naquela época, a Terra no porão de Cleveland arrastava o éter consigo. Este resultado não era esperado; ele parecia indicar propriedades do éter impossíveis de serem conciliadas com as propriedades requeridas para explicar outros fenômenos conhecidos, tais como a aberração de Bradley da luz e a trajetória

37. Mach, *op. cit*, pp. 216-237.
38. A. Michelson and E Morley, em *Silliman's Journal*, vol. 34, 1887, p. 333.

retilínea de raios verticais. Por quase vinte anos este experimento foi uma nuvem no firmamento científico.

Talvez a natureza do experimento de Michelson e Morley possa ser melhor visualizada declarando-se que, da mesma forma como um homem nadando uma certa distância contra corrente e voltando gasta mais tempo do que se estivesse nadando em água parada, também um raio de luz viajando uma dada distância contra o vento de éter e voltando requer mais tempo do que se o éter estivesse em repouso com relação ao aparelho. Supõe-se que o nadador (o raio de luz) move-se sempre com a mesma velocidade com relação à água (éter). Mas o sensível interfeômetro de Michelson e Morley não revelou nenhuma diferença de tempo: daí, portanto, a inferência de que não havia "deriva do éter".

Em 1892, G. F. Fitzgerald[39] de Dublin, e H. A. Lorentz[40] de Leyden, independentemente, lançaram a hipótese audaciosa e aparentemente arbitrária segundo a qual um corpo móvel contrai-se ao longo da direção de seu movimento. Uma régua é mais curta quando se move na direção de seu comprimento do que quando se encontra em repouso. Sob essa hipótese, o experimento de Michelson e Morley podia ser explicado, mesmo que o éter não se movesse com a Terra. Mas os físicos em geral não se contentaram muito com esta teoria da contração. Doze anos se passaram, e, então, Albert Einstein, em Zurique, naquela época, propôs sua teoria da relatividade restrita[41]. Ele constituiu esta teoria sobre bases puramente observacionais, que deviam explicar e coordenar todos os fenômenos conhecidos da luz, inclusive o experimento de Michelson e Morley. Esta fonte de problemas, o éter luminoso do século XIX, Einstein rejeitou por ser puramente hipotética. Também descartou o movimento retilíneo *absoluto* de Newton, por não possuir nenhuma base observacional. Ele sentia-se justificado em postular que a velocidade da luz no vácuo é constante e independente do movimento de sua fonte. Esta independência foi mostrada mais tarde por Willem de Sitter[42], por meio de observações em estrelas duplas. A segunda suposição de Einstein era o "Princípio da relatividade" no sentido restrito: se um segundo sistema de coordenadas move-se uniformemente com relação a um primeiro, desprovido de rotação, então os fenômenos naturais seguem seu curso com relação ao segundo sistema de acordo com as mesmas leis gerais que seguem no primeiro. Na dinâmica desta teoria, a velocidade da luz tem um papel fundamental. Um trem está viajando em uma estrada de ferro retilínea. Dois raios caem sobre os trilhos em dois lugares A e B, distantes um do outro. Um homem sobre os trilhos, que estava no ponto médio M' da distância AB, percebe a luz dos dois raios ao mesmo tempo e os considera simultâneos. Seja M'

39. *Scientific Writings of G. F. Fitzgerald*, Dublin, 1902, pp. ix e 562; O. Lodge, *Philos. Trans.*, vol. 184, London, 1894, p. 749.
40. H. A. Lorentz, *Verlagen d. Zittingen d. K. Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam, vol. I, 1892, p. 74.
41. Einstein, *op. cit.*, contém uma exposição popular.
42. W. de Sitter, *Physikalische Zeitschrift*, vol. 14, 1913, pp. 429 e 1267.

a meia-distância entre A e B sobre o trem móvel. Um observador sobre o trem, situado em M', considerará os raios como simultâneos? Não, pois ele está viajando no trem, em direção a B, e, portanto, move-se em direção ao feixe de luz que vem de B e afasta-se do feixe que vem de A. Daí o observador no trem concluir que o "Flash" de B aconteceu antes do de A. Assim, eventos simultâneos com referência aos trilhos da ferrovia não são simultâneos com referência ao trem. A simultaneidade é um conceito relativo. Cada corpo ou sistema de coordenadas tem seu próprio tempo particular. A declaração do tempo de um evento não é independente do estado de movimento do corpo de referência; não é absoluta. Mas na física newtoniana uma declaração de tempo possuía um significado absoluto. A teoria da relatividade restrita de Einstein fornece resultados matemáticos que concordam com a contração de Fitzgerald-Lorentz. Isto não é estranho, pois os três físicos pretendiam explicar o fenômeno revelado pelo experimento de Michelson e Morley. [N.T. – Com relação a Einstein, hoje sabemos que este não era, de fato, o principal objetivo de seu trabalho, nem mesmo sua fonte de inspiração. Ele inicia o trabalho seminal de 1905, "Sobre a Eletrodinâmica dos corpos em movimento" com o parágrafo: "Como se sabe, a Eletrodinâmica de Maxwell – como atualmente concebida – aplicada a corpos em movimento leva a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenômenos. Consideremos, por exemplo, as ações eletrodinâmicas entre um imã e um condutor. O fenômeno observado depende aqui unicamente do movimento relativo do condutor e do imã, enquanto que, na concepção habitual, os casos em que o móvel é um ou outro desses corpos, são nitidamente distinguidos. Assim, se o imã for móvel e o condutor estacionário, aparecerá em torno do imã um campo elétrico com uma determinada quantidade de energia, que dará origem a uma corrente elétrica no condutor. Mas, se é o imã que está estacionário e o condutor em movimento, então, embora não se estabeleça em torno do ímã nenhum campo elétrico, haverá uma força eletro-motriz que não corresponde a nenhuma energia, mas que dá lugar a correntes elétricas de intensidade e comportamento idênticos àqueles que, no primeiro caso, foram produzidas por forças elétricas – desde que, nos dois casos considerados, exista identidade no movimento relativo" (Einstein, A., *Ann. d. Phys.* vol. 17, 1905). Einstein apenas menciona, a seguir, "o insucesso dos experimentos realizados com o intuito de comprovar o movimento da Terra com respeito ao meio luminoso... ou seja, o resultado negativo do experimento de Michelson e Morley].

Lorentz também estabeleceu equações relacionando distâncias e tempos de um sistema de coordenadas C' (o trem movendo-se uniformemente), expressas em termos do sistema de coordenadas C (a ferrovia retilínea). Essas equações, conhecidas como "transformações de Lorentz"[43], encaixam-se na teoria da relatividade restrita de

43. Lorentz, *op. cit.*. Para uma dedução simples da transformação de Lorentz, veja Einstein, *op. cit.*, Apêndice I, p. 139.

Einstein. Forneço, abaixo, em colunas paralelas, os valores x', y', z', t', de um evento relativo ao sistema de coordenada C', quando os valores de x, y, z e t do mesmo evento relativos a C são dados. C' move-se com relação a C com uma velocidade uniforme v. A velocidade da luz no vácuo é representada por c. Os eixos dos dois sistemas C e C' são respectivamente paralelos. Supomos, por simplicidade, que o evento está localizado sobre o eixo x.

TRANSFORMAÇÃO DE NEWTON*	TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ
$x' = x - vt$	$x' = \frac{(x-vt)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$t' = t$	$t' = \frac{\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Comparando-se os dois conjuntos de equações, nota-se que o último é muito mais complicado. A relatividade é um exemplo de teoria que cresceu muito mais intrincada como conseqüência de ser fundamentada sobre dados puramente empíricos. Os dois sistemas coincidem quando os sistemas de coordenadas tem velocidades relativas v infinitesimais se comparadas com a da luz. Foi este fato que possibilitou à mecânica newtoniana representar movimentos planetários com excelentes grau de aproximação e sucesso. Para comentários sobre a teoria da relatividade geral, de 1915, veja a nota 6 sobre a natureza da gravidade.

14. *As leis do Movimento.* Dada a sua importância, reproduzo aqui as três leis no original em latim;

Lex I (Nas edições de 1687 e 1713). Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex I (na edição de 1726) Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Lex II. Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam retam qua vis illa imprimitur.

Lex III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

* Mais comumente conhecidas como "Transformações de Lorentz" (N.T.).

A primeira lei é freqüentemente mencionada como "lei da inércia". Estudiosos da relatividade salientam que não sabemos da existência de qualquer corpo na natureza que esteja em repouso absoluto, nem na Terra, nem no Sol ou nas estrelas; que há repouso apenas com relação a algum sistema de coordenadas. Einstein fez um exame crítico do que ele chamou de "sistema galileano de coordenadas", no qual vale a lei da inércia, e no qual não existe campo gravitacional que não seja rigorosamente vinculado à Terra. "As estrelas fixas visíveis são corpos para os quais a lei da inércia certamente é válida em excelente grau de aproximação... As leis da mecânica de Galileu-Newton podem ser tomadas como válidas apenas para um sistema galileano de coordenadas"[44]. Ver nota 13.

15. A segunda Lei do Movimento. *Força.* Pela segunda Definição de Newton, "quantidade de movimento" (*momentum*) surge "da velocidade e quantidade de matéria conjuntamente", isto é, de *mv*. Pela segunda Lei do Movimento, "mudança de movimento", isto é, mudança na quantidade de movimento, "é proporcional à força motora imprimida". Assim, temos a "mudança de movimento" como a medida da força que a produz. E, assim, deriva a medida da força como o produto da massa e aceleração. Esse conceito de força teve um papel fundamental na mecânica desde o tempo de Newton até o final do século XIX. Ele continuará a desempenhar um papel básico na mecânica que envolva velocidades pequenas comparadas com a da luz. Mas, como um conceito em mecânica geral cosmológica, tem se retirado para um plano de fundo. Um resultado experimental de maior alcance foi obtido em 1901 por W. Kaufmann, o de que a massa de um elétron aumenta rapidamente quando sua velocidade se aproxima da velocidade da luz[45]. A invariância da massa na mecânica newtoniana mostrou-se, então, incorreta (ver nota 11). A força newtoniana de atração gravitacional entre dois corpos varia como o produto de suas massas, e inversamente como o quadrado da distância. Essa força tornou-se ambígua pela pesquisa recente, porque, primeiro, massa depende da velocidade, e, segundo, distância, de acordo com a teoria da relatividade,

44. Einstein, A., *op. cit.*, pp. 12 e 13. Forneço ainda algumas referências adicionais sobre as Leis do Movimento:
Samuel Horsley (o editor da *Opera* de Newton, 1779-1785) fornece discussão metafísica das Leis do Movimento de Newton, que pode ser encontrada em *Lord Monboddo and some of his contemporaries* (ed. William Knight), London, 1990, pp. 281-284; 298 e 302-305.
J.C. Maxwell, *Matter and Motion*, London, 1876.
Sir W. Thomson e P. G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Parte I, Cambridge, 1879.
K. Pearson, *Grammar of Science*, London, 1900, pp. 321-327 e 533-536; Apêndice, Notas 1 e 2.
E. Mach, *Die Mechanik in ihrer entwicklung*, 8 ed., Leipzig, 1921.
E. Freundlich, *Grundlagen der Einsteinschen Gravitations Theorie*, Berlin, 1920, p. 42.
A. S. Eddington, *Space, Time and Gravitation*, Cambridge, 1920, cap. IX.
45. W. Kaufmann, *Göttinger Nachrichten*, 8 de novembro de 1901; veja também os volumes de 1902 e 1903.

depende da localização do observador. A teoria gravitacional de Einstein de 1915 solapa a crença na realidade da gravitação como uma "força". Mas sua teoria de 1915 não inclui um tratamento semelhante das forças eletromagnéticas. Generalizações da teoria, para incluir também as forças eletromagnéticas, foram feitas de maneiras um tanto diferentes por H. Weyl[46] em 1918, Eddington[47] em 1921 e Einstein[48] em 1929.

16. Livro I, Escólio e Lema XI. *Expressões e notações matemáticas obsoletas.* Nas edições latinas dos *Principia* de Newton, bem como na tradução de Motte para o inglês, aparecem determinadas expressões matemáticas não mais usadas e, portanto, não prontamente compreensíveis para um leitor familiarizado somente com a fraseologia moderna. Alterei a tradução, substituindo a antiga pela correspondente terminologia moderna. Os termos obsoletos mais freqüentes são "duplicate ratio", "subduplicate ratio", "triplicate ratio", "subtriplicate ratio", "subsesquiplicate ratio", "sesquialteral ratio". Em lugar destes usei, respectivamente, os termos "square of the ratio", "square root of the ratio", "cube of the ratio", "cube root of de ratio", "$\frac{3}{2}^{\text{th}}$ power of the ratio", "$\frac{2}{3}^{\text{th}}$ power of the ratio", "ratio of 3 to 2". Em algumas poucas ocorrências o antigo uso do termo "proporção" corresponde ao moderno "razão".
Descartei o *vinculum* como sinal de agregação e introduzi em seu lugar o parêntesis. Em alguns lugares em que o raciocínio é por demais intrincado, introduzi a notação moderna para a proporções, $a : b = c : d$, em lugar da forma retórica usada nos *Principia.* Em lugar do sinal de multiplicação (x), que ocorre freqüentemente nos *Principia* originais, usei o ponto (.). Em alguns lugares empreguei a barra (/) na impressão de frações.

17. Livro I, Escólio após as leis do Movimento. *Wren e Mariotte.* O leitor pode querer consultar "Note on a Singular Passage in the *Principia*", P. G. Tait, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,* vol. 13, 1886, pp. 72-78, que lida com questões de prioridade.

18. Livro I, Proposição XVI, Corolário IV. Por *distância média* a partir do foco de uma elipse deve-se entender o semi-eixo maior ou a distância SB a partir do foco até uma extremidade do eixo menor BC. Esta distância é também o raio do círculo em questão. A prova do Corolário IV segue imediatamente do Corolário VI, Proposição IV, como indicado no texto. As duas últimas sentenças do Corolário IV mostram a consistência deste resultado com a Proposição XVI, de acordo com a qual a velocidade na órbita

46. H. Weyl, *Sitzungsberichte der Preuss. Akademie d. Wissensch.*, Phys.-Math. Klasse, 1918, p. 465.
47. E. Eddington, *Proceedings of the Royal Society of London,* A 99, 1921, p. 104.
48. Einstein. "Zur einheitlichen Feldtheorie", *Sitzungsberichte der Preuss. Akademie d. Wissensch.*, Phys. – Math. Klasse, 1929, I.

elíptica está para aquela na órbita circular como $\left(\frac{\sqrt{L}}{BC}\right) : \left(\frac{\sqrt{l}}{SB}\right)$, em que L e l são os *latera recta* da elipse e do círculo, respectivamente. Mas BC : SB = $\sqrt{SB.L} : \sqrt{SB.l}$. Daí que as velocidades como derivadas a partir da Proposição XVI são inversamente como as raízes quadradas das distâncias iguais SB, e são, portanto, iguais entre si.

19. Livro I, Lema XVII. *Trapezium.* Newton usou a palavra "trapezium" no sentido euclidiano, como qualquer quadrilátero que não seja um quadrado ou um paralelogramo.

20. Livro I, Lema XXII. *Geometria das Cônicas.* Para uma descrição do papel que este Lema e outras partes da geometria das cônicas, dadas no primeiro Livro dos *Principia*, desempenham na história da geometria sintética, consulte J. J. Milne, "Newton's Contribution to the Geometry of Conics", in *Isaac Newton, 1642-1727*, London, 1927, pp. 06114; e também Ernst Kotter, *Die Entwicklung der Synthetischen Geometry, von Monge bis auf Staudt*, Leipzig, 1901, pp. 8, 9, 30, 39, 41 e 109, e em outros lugares indicados no índice alfabético sob "Newton". Consulte também Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*; ; R. H. Grahan, "Newton's Influence on Modern Geometry", *Nature*, vol. 42, 1890, pp. 139-142; C. Taylor, "The *Principia* and Modern Geometry", *Cambridge Philosophical Society Proceedings*, vol. 3, 1880, pp. 359-360. O lema XXII de Newton visa principalmente a transferir certos pontos na figura para o infinito.

21. Livro I, Lema XXVIII. *Figuras ovais.* Brougham e Routh[49] notaram que, neste Lema, Newton tentou provar que nenhuma figura de forma oval ou nenhuma curva contínua confinada a uma região finita de um plano, e que retorna a si mesma, admite quadratura definida. Em outras palavras, Newton tentou mostrar que a área dessa curva pode ser expressa em termos de números racionais ou irracionais que surgem da solução de equações algébricas com coeficientes racionais, mas apenas por meio de números transcedentais, tais como p, que surge como um fator na área do círculo. Brougham e Routh afirmam que a conclusão do raciocínio de Newton tem sido questionada e citam, como exemplo, a curva onde m e n são inteiros pares

$$y^m = x^{(n-1)^m} . (a^n - x^n),$$

positivos; essa curva satisfaz as especificações de Newton, e, no entanto, admite quadratura exata. Considere, por simplicidade, o caso em que $m = n = 2$, com a sendo um inteiro positivo. A curva $y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$ tem, para o segmento $0 < x \leq a$, a área

$$A = \int_o^x 2y\ dx = -\left.\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_o^x = \frac{a^2}{3} - \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

49. H. Brougham e E. J. Routh, *Analytical View of Sir Isaac Newton's Principia*, London, 1855, pp. 72-74. Veja também Ball, *Essay*, p. 83.

Removendo-se o radical, obtém-se uma equação algébrica do segundo grau com relação à área requerida A. Portanto, a área desse segmento, apesar de irracional em geral, não é transcendental para valores algébricos de x. Se $x = a$, tem-se área da oval inteira $\frac{a^2}{3}$, que é racional.

A passagem "a equação pela qual qualquer intersecção de duas linhas é encontrada simultaneamente, ao mesmo tempo, exibe todas as suas interseções pelo mesmo número de raízes, e, portanto, eleva-se a tantas dimensões quantas são as intersecções", está aberta a objeção *em sua aplicação para a espiral*, uma curva transcendental.

22. Livro I, Proposição XXXI e Escólio. *O problema de Kepler.* Newton lida aqui com um famoso problema que apareceu pela primeira vez na *Astronomia Nova*[50], de John Kepler, 1609. Ele requer a determinação de x na equação

$$x - e.\text{sen}(x) = z,$$

onde e e z são dados. O astrônomo J. C. Adams descreveu em um artigo[51] dois métodos rápidos de aproximação e, então, salientou "que o primeiro método explicado acima é exatamente equivalente àquele fornecido por Newton nos *Principia*, pp. 101-102, segunda edição, ou pp. 109-110 [primeira parte do Escólio], terceira edição, quando as expressões de Newton são colocadas em forma analítica moderna". Entretanto, nenhum dos autores subseqüentes menciona este método como sendo de Newton, a forma não usual da solução de Newton, sem dúvida, contribuindo para que não se tomasse conhecimento dela. Na primeira edição dos *Principia* é fornecida uma modificação do método que foi, sem dúvida, pensada por Newton como sendo equivalente ao segundo método dado acima, mas, por alguma inadvertência, em vez do denominador de $\delta x'$ ser

$$1 - e.\cos(x' + \frac{\delta z'}{2})$$

quando expresso na notação acima, Newton o toma como equivalente a

$$1 - e.\cos\,[x + (\frac{e}{2}).\text{sen}(x')],$$

o que somente é verdade em primeira aproximação, quando x_0 é tomado $= z$".

O primeiro método referido é assim descrito por Adams:

"A equação a ser resolvida por aproximações sucessivas é:

$$x - e.\text{sen}(x) = z,$$

em que z é a anomalia média conhecida, e a excentricidade, e x a anomalia excêntrica a ser determinada".

50. *Opera*, vol. 3, p. 411; *Kepler's Neue Astronomie*, pp. 52, 358 e 414,
51. J. C. Adams, "On Newton's solution of Kepler's Problem", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, vol. 43, 1882, pp. 43-49.

"Suponha que x_0 seja um valor aproximado de x, encontrado por estimativa, por construção gráfica ou por um cálculo grosseiro, e seja

$$x_0 - e.\text{sen}(x_0) = z_0$$

Então, se $\delta x_0 = \dfrac{(z - z_0)}{[1 - e.\cos(x_0)]}$

e $x' = x_0 + \delta x_0$, x' será um valor de x muito mais aproximado do que x_0".

"Analogamente, se usarmos $x' - e.\text{sen}(x') = z'$

e se $\delta x' = \dfrac{(z - z')}{[1 - e.\cos(x')]}$

e $x'' = x' + \delta x'$, x'' será um valor de x muito mais aproximado do que x', e assim por diante...".

O problema de Kepler ocupou a atenção de muitos astrônomos; 123 artigos são listados em uma bibliografia do problema publicada no *Bulletin Astronomique*, Paris, vol. 1900, pp. 37-47. Várias tabelas para resolver o problema estão disponíveis, a melhor das quais é a de J. J. Astrand, *Hülfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Kepler'schen Problemes*, Leipzig, 1890.

23. Livro I, Proposição XLV, Corolário II. *Movimento das apsides nas órbitas.* Nas segunda e terceira edições dos *Principia* aparece a sentença "a apside da Lua é cerca de duas vezes mais rápida" (*Apsis lunae est duplo velocior circiter*), isto é, duas vezes mais rápida que o ângulo 1°31'28", que determina o movimento progressivo da apside em uma revolução do corpo em sua órbita elíptica. É significativo que esta sentença não ocorra na primeira edição dos *Principia* e que o ângulo aí fornecido seja 1°31'14". Eis aqui a celebrada discrepância entre os movimentos calculado e observado das apsides da lua. O valor observado é cerca de duas vezes o calculado. O cálculo é baseado no acréscimo da $\dfrac{1}{357{,}45}$ parte da força centrípeta, pela qual a Terra atrai a Lua, acréscimo este acusado pela atração solar sobre a Lua.

O problema da Lua dirigiu a atenção de Newton por muitos anos[52]. Por volta de 1694, ele conseguiu alguns dados observacionais do astrônomo Flamsteed, em Greenwich, com o propósito de verificar os resultados de suas investigações matemáticas, mas Newton não ficou satisfeito. Flamsteed, por outro lado, estava mais inclinado a reter suas observações até tudo aparecer na forma de livro, como um monumento de seus esforços como astrônomo observacional. Este conflito de interesses, combinado com a irritabilidade de Newton no trato pessoal naquela época, e a sensibilidade de

52. Um artigo histórico de S. B. Gaythorpe, "On Horrocks's Treatment of the Evection and the Equation of the Centre, With a Note on the elliptic Hypothesis of Albert Curtz and its correction by Boulliau and Newton", contendo diversas referências às diferentes edições dos *Principia* pode ser encontrado em *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, vol. 85, 1925, pp. 858-865.

Flamsteed devido a séria debilidade física, levou a uma lastimável controvérsia entre esses dois grandes homens, na qual duras palavras foram usadas[53].

A discrepância entre a teoria e a observação no movimento das apsides lunares parece ter sido superada por Newton, mas em lugar algum dos *Principia* ele fornece explicitamente a explicação, embora no Livro III, Proposição XXV, mostre figuras que tornariam a progressão anual da linha das apsides aproximadamente igual ao seu valor verdadeiro. Lá, Newton estima que a força perturbadora total do Sol sobre a Lua está para a força centrípeta da Terra na razão de 1 para 178.($\frac{29}{40}$); esta razão fornece resultados muitos bons o movimento apsidal.

Que Newton tenha superado a principal dificuldade no movimento da linha das apsides lunares conclui-se, também, de seu comentário no Livro III, Proposição XXIII: "Mas os movimentos das apsides assim encontrados devem ser diminuídos na proporção de 5 para 9, ou cerca de 1 para 2, por uma causa que aqui não posso deter-me para explicar" (*Diminui tamem debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter ob causam quam hic exponere non vacat*). Pembertom, que editou a 3ª edição dos *Principia*, sugeriu que lá fosse acrescentada "uma breve indicação do princípio a partir do qual a regra contida nesta linha foi deduzida", mas Newton não aceitou a sugestão. Adams comenta que, se Newton tivesse concordado, "todas as dificuldades ligadas ao movimento do apogeu lunar teriam sido evitadas"[54].

No *Portsmouth Collection of Books and Papers*, Cambridge, 1888, pp. xi-xiii e xxvi-xxx, e na seção I, divisão IX, números 7 e 12, há elaborações[55] que, de acordo com Ball, parecem não ter satisfeito a Newton, considerando-se as alterações realizadas no manuscrito, mas que forneciam, apesar disso, como movimento anual médio do apogeu 38°51'52", enquanto o movimento observado era de 40°41'30".

Os astrônomos naquela época não tinham meios de saber que resultados, se é que havia, Newton obteve privadamente; tudo o que podiam saber eram os resultados publicados nos *Principia*. O movimento das apsides lunares destacou-se como um problema não satisfatoriamente resolvido com base na lei da gravitação newtoniana. Aproximadamente vinte anos se passaram antes que qualquer avanço substancial fosse feito, mas, quando finalmente isto aconteceu, veio de uma forma sensacional. O matemático francês Alexis Claude Clairaut, em 1752, ganhou um prêmio da academia de São Petersburgo por um artigo sobre a teoria da Lua, que explicava o movimento das apsides[56]. Ele foi o primeiro a aplicar a análise moderna à teoria lunar. À primeira vista, o

53. Veja F. Baily, *An Account of the Revd. John Flamsteed*, London, 1835, pp. 69 e 217; Brewster, *op. cit.*, pp. 163-183.
54. Brewster, *op. cit.*, vol. 2, p. 418.
55. Veja também Ball, *Essay*, pp. 85 e 109.
56. Clairaut, *Théorie de la lune*, Petersburgo, 1752, segunda edição, Paris, 1765, em que na p. 5 são fornecidas notas históricas. Para artigos prévios de Clairaut, veja *Mémoires de l'Academie des Sciences*,

movimento das apsides pareceu a Clairaut totalmente inexplicável pela lei de Newton. Ele começou audaciosamente estabelecendo uma nova hipótese sobre a gravitação, ao supor que a força centrípeta não fosse como $\frac{1}{d^2}$, mas como $\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^4}$. Mas, antes de avançar muito nesta nova teoria, tomou a precaução de efetuar seus cálculos, usando a lei de Newton, em um grau mais alto de aproximação e, para seu espanto, em 1749, chegou a resultados que concordavam com as observações. A concordância foi rapidamente considerada como um brilhante triunfo da teoria newtoniana. Uma investigação completa do problema foi dada por Laplace, no seu *Mécanique Céleste*[57].
É interessante um comentário pessoal de Newton sobre a teoria lunar; ele disse a Halley que a teoria da Lua deu-lhe dores-de-cabeça, mantendo-o acordado tão freqüentemente que não pensaria mais nela[58]. Mas, mostramos que Newton, de fato, continuou dando atenção às irregularidades da Lua. A teoria lunar causou dores-de-cabeça a astrônomos em épocas posteriores. No século XX, especialistas lunares como E. W. Brown e W. de Sitter, encontraram desvios inexplicáveis da Lua de suas posições previstas. O movimento da Lua não foi ainda exatamente explicado com base na teoria gravitacional. Conjeturou-se que a causa da diferença entre previsão e observação está na taxa de rotação da Terra, causada provavelmente por ligeiras mudanças periódicas na forma da Terra[59].

24. Livro I, Proposição LX. *Duas médias proporcionais.* Se $a : x = x : y = y : b$, então x e y são chamados de "duas médias proporcionais" entre a e b; x é chamado de "primeira" de duas médias proporcionais. Obtemos $x^2 = ay$ e $y^2 = bx$. Eliminando y, $x = \sqrt[3]{a^2b}$. Se $a = S + P$ e $b = S$, então na Proposição LX, o principal eixo da elipse de P quando S se move, está para o eixo principal da elipse de P quando S é estacionário (o tempo periódico de P permanecendo o mesmo), como $S + P : \sqrt[3]{(S + P)^2 S}$.

1745, Paris, 1749, p. 577; também um artigo anterior nas pp. 329-364, e uma crítica deste feita por Buffon nas pp. 493-500; a resposta de Claiuraut a Buffon nas pp. 529-548, e a réplica de Buffon, pp. 551-552. Clairaut escreveu sobre a órbita da Lua nestas *Mémoires* para o ano de 1748, Paris, 1752, pp. 421-440. Ver também Brougham e Routh, *Analytical View.... Newton's Principia*, pp. 89-98; E. W. Brown, *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge, 1896, pp. 2, 6, 127, 237 e 238.

57. P. S. Laplace, *Mécanique Céleste*, 1799-1825, Vol. III, Livro VII, pp. 169-303; *Oeuvres de Laplace*, vol. III, Paris, 1878, pp. 181-323.
58. Brewster, *op. cit.*, p. 108.
59. Consulte P. A. Hansen, "Darlegung der theor. Berechnung d. in den Mondtafeln angewandten Störungen", *Abhandl. d. math-phys. Classe der k. sächsisch. Gesellschaft d. Wissenschaften*, Leipzig, vol. 6, 1864, vol. 7, 1865; Simon Newcomb, *Astronomical Papers for the use of the American Ephemeries*, vol. 9, Pt. I, p. 18; artigos no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, por E. W. Brown, vol. 73, 1913, p. 692; vol. 74, 1914, pp. 156, 362, 396, 424 e 552; vol. 75, 1915, p. 506; e por A. C. D. Crommelin, vol. 83, 1923, p. 359. Também o artigo "Moon", por J. Jackson, na *Encyclopaedia Britannica*, 14 ed.

25. Livro I, Proposição LXXV; também Livro III, Proposição VIII. *Atração entre esferas.* A determinação de Newton da atração que uma esfera sólida exerce sobre um ponto externo é explicada mais completamente com a análise moderna, em um artigo de A. N. Kriloff, no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, vol. 85, 1925, p. 571. James Pierpont demonstrou que o teorema segundo o qual duas esferas atraem-se com uma força que varia como o inverso do quadrado da distância entre seus centros também é válido em um espaço elíptico. Veja o artigo de Pierpont no *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 35, 1929, pp. 351-356.

26. Livro I, Proposição XCVI. *Velocidade da Luz.* Newton chega à conclusão de que a velocidade da luz em um meio mais denso é maior do que em um meio mais rarefeito. Mas Jean Léon Foucault provou, em 1850, que a velocidade da luz é menor na água que no ar. Isso foi considerado pelos físicos do século XIX como um experimento crucial, que refutava definitivamente a teoria newtoniana da emissão. No século XX houve um ressurgimento da teoria corpuscular da luz, e o experimento de Foucault não foi mais considerado decisivo. Newton havia suposto nos *Principia* que o corpúsculo de luz era "atraído ou impelido perpendicularmente em direção a qualquer daqueles meios, e não era agitado ou impelido por qualquer outra força". Para chegar a um resultado em acordo com o experimento de Foucault, é necessário apenas supor que o corpúsculo depara-se com uma recepção diferente. Como Alex Wood[60] observou, pode ser que o corpúsculo viajante não seja atraído de forma alguma; pode ser que, quando ele alcança a superfície da água, a componente de sua velocidade paralela à superfície *diminua* por uma ação de tipo friccional, enquanto a componente perpendicular de sua velocidade fica invariante. De acordo com tais suposições, a velocidade do corpúsculo na água seria menor do que no ar, como requerido pelo experimento. Em 1924, a teoria da "mecânica ondulatória" foi proposta, tentando unificar as teorias corpuscular e ondulatória da luz. Uma explicação do experimento de Foucault com base na teoria "mecânica ondulatória" é encontrada em Ludwig Flamm, *Die Naturwissenschaften*, vol. 15, 15 de julho de 1927.

27. Proposição XCVI, Escólio. *Difração da luz.* O fenômeno que Newton descreve como "inflexão" da luz é agora denominado "difração" da luz.

60. A. Wood, *In Pursuit of Truth*, London, 1927, p. 47.

Título	Principia*: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural – Livro I*
Autor	Isaac Newton
Tradução	Trieste Ricci
	Leonardo Gregory Brunet
	Sônia Terezinha Gehring
	Maria Helena Curcio Célia
Revisão de Tradução	Fábio Duarte Joly
Produção	Marilena Vizentin
	Cristiane Silvestrin
Projeto Gráfico	Cristiane Silvestrin
Capa	Ricardo Assis
Editoração Eletrônica	Cristiane Silvestrin
Revisão de Texto	Fábio Duarte Joly
Revisão de Provas	Marilena Vizentin
	Kátia Aily Franco de Camargo
Divulgação	Regina Brandão
	Bruno Tenan
	Beatriz Rosa
Secretaria Editorial	Eliane dos Santos
Formato	18 x 25,5 cm
Tipologia	New Baskerville 11/15
Papel Certificado FSC®	Pólen Soft 80 g/m^2 (miolo)
	Cartão Supremo 300 g/m^2 (capa)
Número de Páginas	328
Tiragem	2000
CTP, Impressão e Acabamento	Mundial Gráfica